

نظرية الأعداد

مذكرة تدريبية للمرحلة الثانية

(تحتوي على أكثر من : 250 مسألة)

إعداد الأستاذ /

طارق بن عامر آل سعدون الصيعري

بلك

الافهم

أستمتع

مُتَلَمِّتًا

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله ، وبعد :

هذه مذكرة تدريبية في فرع نظرية الأعداد تصلح لأن تكون مقدمة للمبتدئ في هذا العلم ، ومن ليس لديه خلفية سابقة . بذلت فيها جهدي كي تكون المفاهيم واضحة ، وبمبسطة .

احتوت هذه المذكرة على سبع محاضرات ، وفي كل محاضرة مجموعة من الأمثلة التوضيحية مع ثلاثون مسألة المبيادية من النوع المبتدئ نصفها محلول ، والنصف الآخر تركته للنقاش بحيث أصبح عدد المسائل أكثر من مائتين وخمسين مسألة .

وقد كانت المحاضرات على الترتيب التالي :

المحاضرة الأولى : قابلية القسمة ، وخوارزمية القسمة .

المحاضرة الثانية : الأعداد الأولية ، والنظرية الأساسية في الحساب .

المحاضرة الثالثة : القاسم المشترك الأعظم .

المحاضرة الرابعة : المضاعف المشترك الأصغر .

المحاضرة الخامسة : التطابقات .

المحاضرة السادسة : النظم العددية .

المحاضرة السابعة : الاستقراء الرياضي .

هذا ومن الله السداد ، والتوفيق ، فاللهم لك الحمد أولاً ، وآخرأ .

بعض الرموز المستخدمة ، والمتكررة في الكتاب :

- (1) \mathbb{N} : تعني مجموعة الأعداد الطبيعية .
- (2) \mathbb{Z} : تعني مجموعة الأعداد الصحيحة .
- (3) \mathbb{Q} : تعني مجموعة الأعداد النسبية .
- (4) \mathbb{R} : تعني مجموعة الأعداد الحقيقية .
- (5) \mathbb{C} : تعني مجموعة الأعداد المركبة .
- (6) $a | b$: تعني أن العدد a يقسم العدد b .
- (7) $a \nmid b$: تعني أن العدد a لا يقسم العدد b .
- (8) $\gcd(a, b)$: تعني القاسم . أو العامل . المشترك الأعظم للعددين a و b .
- (9) $\text{lcd} = [a, b]$: تعني المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .
- (10) $a \equiv b \pmod{n}$: تعني العدد a يطابق العدد b مقياس n . وهي صورة جميلة لقابلية القسمة وتعني أن باقي قسمة a على n يساوي b .

بعض المتطابقات المهمة التي نحتاجها في حل الكثير من المسائل :

$$[1] \quad (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

$$[2] \quad (a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$[3] \quad (a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$[4] \quad a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

$$[5] \quad a^4 + 1 = (a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1)$$

$$[6] \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$[7] \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$[8] \quad (a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \dots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$$

$$[9] \quad (a^{2n+1} - b^{2n+1}) = (a - b)(a^{2n}b^0 + a^{2n-1}b^1 + \dots + a^1b^{2n-1} + a^0b^{2n})$$

$$[10] \quad (a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} \cdot b^k = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} \cdot b^1 + \binom{m}{2} a^{m-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{m}{m-1} a^1 \cdot b^{m-1} + b^m$$

المحاضرة الأولى

قابلية القسمة ، وخوارزمية القسمة : *Divisibility and Division Algorithm*

(1) القسمة :

القسمة : هي إيجاد عدد نسبته إلى الواحد كنسبة المقسوم إلى المقسوم عليه ، أما القاسم المشترك الأعظم لعددين أو أكثر فهو أكبر عدد يقسم العددين معاً ، أو هو أكبر العوامل المشتركة بينهما ، مثلاً : نسبة $\frac{15}{3}$ كنسبة : 5 : 1 .

(2) قابلية القسمة :

نقول أن العدد a يقسم العدد b بدون باقٍ ، ويكتب بالشكل : $a \mid b$ ، أو $\frac{b}{a}$ إذا وجد عدد صحيح : c بحيث : $b = ca$ أو $\frac{b}{a} = c$ ، فمثلاً : العدد : 3 يقسم العدد : 6 ، وبالتالي يمكن أن نكتب : $6 = 3 \times 2$.

بينما إذا كان : a لا يقسم b ، فإننا نكتبه على الصورة : $a \nmid b$ ، فمثلاً العدد : 5 لا يقسم العدد : 8 ، لأنه لا يوجد عدد إذا ضربناه في : 5 لكان الناتج : 8 .

ويمكن أن نقول أن : a عامل (*factor*) من عوامل : b أو نقول أن : b مضاعف (*multiple*) للعدد : a .

(3) القاسم التام أو الكامل : *Fully Divides*

نقول أن العدد : a^n يقسم العدد : b ، ونكتب : $a^n \parallel b$ إذا كان : n أكبر أس لـ a يجعل : a^n تقسم العدد : b . أي : $a^n \mid b$ بشرط أن : $a^{n+1} \nmid b$.

مثال : أوجد أكبر عدد لـ : n حيث : $3^n \mid 135$ ؟

بتحليل العدد : 135 سنجد أنه يساوي : $135 = 3.3.3.5 = 3^3.5$ بسهولة سنجد أن : $n = 3$. أي أن : $3^3 \parallel 135$.

(4) خواص القاسم :

ليكن a, b, c أعداد صحيحة عندئذ:

(1) إذا كان : $a | b$ و $a | c$ ، فإن : $a | -b$ ، $a | -c$ ، وبصورة عامة : $a | (b \pm c)$. أي أن : a يقسم حاصل جمعهما ، أو طرحهما .

مثال : $3 | 6$ ، و $3 | 9$ إذاً : $3 | -6$ ، $3 | -9$ ، وتقسم : $3 | (9 + 6) = 15$ ، وتقسم : $3 | (9 - 6) = 3$ ، وأيضاً تقسم : $3 | (6 - 9) = -3$.

(2) إذا كان : $a | b$ ، فإن : $a | bc$ ، و $ac | bc$ حيث $c \neq 0$. أي أن القاسم لعدد يقسم أي مضاعف هذا العدد .

مثال : $2 | 10$ ، إذاً : $2 | 10 \times 3 = 30$. أي أن : 2 تقسم مضاعفات : 10 .

(3) إذا كان : $a | b$ و $a | c$ ، فإنه يوجد عدداً صحيحان : x, y يحققان أن : $a | bx \pm cy$ أي أن : a تقسم أي تركيب خطي على الصورة : $bx \pm cy$ ، وهذه هي الصورة العامة للفترتين : (1)، (2) .

(4) إذا كان : $a | b$ ، و $b | c$ ، فإن : $a | c$. أي أن القاسم يحقق علاقة التبعدي .

(5) إذا كان : $a | b$ ، و $b | a$ ، فإن $a = b$ ، أو $a = -b$. أي أن قابلية القسمة تحقق علاقة الانعكاس .

برهان الثلاث الخواص الأولى :

وستثبت الفقرات الثلاث الأولى ، والبقية يمكن إثباتها بنفس الفكرة ، وستتركها كتمرين للطالب يبرهن في وقت المحاضرة .

(1) بما أن : $a \mid b$ إذاً يوجد عدد صحيح : b' يحقق أن : $b = ab'$. بالمثل : $c = ac'$. بالجمع أو الطرح سنجد أن : $b \pm c = ab' \pm ac' = a(b' \pm c') \Rightarrow b' \pm c' = \frac{b \pm c}{a}$: تقسم المقدار : $b \pm c$ لأن : $b' \pm c'$ أعداد صحيحة .

(2) إذا كان $a \mid b$ فإن $ac \mid bc$ حيث $c \neq 0$.

$$a \mid b \Rightarrow b = ab' \Rightarrow bc = acb' \Rightarrow \frac{bc}{ac} = b' \Rightarrow ac \mid bc$$

(3) بما أن : $a \mid b$ يمكن أن نكتب : $b = ab'$ بالضرب في : x يصبح المقدار على الصورة : $bx = ab'x$ ، ويمكن أن نكتب : $\frac{bx}{a} = b'x$ أي أن : a تقسم : bx لأن : $a \mid b$. بالمثل : $a \mid cy$ حيث : x, y أي عددين صحيحين ، الآن : فقط علينا أن نثبت أن : $a \mid bx + cy$ ، بالجمع نجد أن :

$$bx + cy = ab'x + ac'y \Rightarrow bx + cy = a(b'x + c'y) \Rightarrow \frac{bx + cy}{a} = b'x + c'y$$

وهذا يعني أن : $a \mid bx + cy$ لأن : $b'x + c'y$ عدداً صحيحاً .

(5) ملاحظات مهمة :

🔑 إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$ ، فهل : $(a+c) \mid (b+d)$ ؟

الإجابة طبعاً خاطئة ، ويمكن إثباتها بسهولة بإعطاء مثال معاكس : $3 \mid 6$ ، $5 \mid 15$ ، ولكن :

$$5 + 3 \nmid 15 + 6$$

🔑 لأي عدد صحيح : a ، فإن : $1 \mid a$ ، و $a \mid 0$ بشرط أن : $a \neq 0$.

🔑 إذا كان : $a \mid c$ ، و $b \mid c$ ، فإن هذا لا يقتضي بالضرورة أن : $ab \mid c$.

🔑 كذلك إذا كان : $a \mid c$ ، و $b \mid c$ ، فإن هذا لا يقتضي بالضرورة أن : $a \pm b \mid c$.

ومثال على الفقرتين الأخيرتين : لو أخذنا : $a = 4, b = 6, c = 12$ ستلاحظ أن :

$4 \mid 12$ ، $6 \mid 12$ ، ولكن : $4, 6 \nmid 12$ ، وأيضاً : $4 + 6 \nmid 12$. ويمكن إعطاء مثال آخر عن الطرح .

(6) خوارزمية القسمة : Division Algorithm

عند قسمة العدد : 17 على العدد : 3 ، فإننا نحصل على العدد : 5 ، والباقي : 2 نسمي التركيب الخطي : $17 = 3 \times 5 + 2$ خوارزمية القسمة ، ونطلق على : 17 المقسوم *dividend* كما نسمي : 3 المقسوم عليه *divisor* ، العدد : 5 خارج القسمة *quotient* ، والعدد : 2 باقي القسمة : *remainder* .

لاحظ أن باقي القسمة أصغر من المقسوم عليه . ممكن هنا أن نستنتج تركيب خطي سنطلق عليه خوارزمية القسمة كالتالي :

تعريف :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a > 0$. بحيث إذا قسمنا العدد : a على العدد : b ، فإنه يوجد عدداً $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث : $b = aq + r$ ، بشرط أن : $0 \leq r < a$.

نسمي : b المقسوم *dividend* ، a المقسوم عليه *divisor* ، q خارج القسمة *quotient* ، و r باقي القسمة *remainder* .

وهذه هي الصورة الخطية لخوارزمية القسمة ، ويمكن أن نستنتج التالي من خوارزمية القسمة :

دائماً : الباقي : r أصغر من المقسوم عليه : a .

إذا كان : $r = 0$ ، فإن : b تقبل القسمة على : a ، ونكتب خوارزمية القسمة في هذه الحالة :

$$b = aq$$

(7) الأعداد الزوجية ، والفردية : *Even and Odd numbers*

العدد الزوجي : هو العدد الصحيح الذي باقي قسمته على : 2 يساوي : 0 ، ويمكن كتابته على

الصورة : $2n$ حيث : $n \in \mathbb{Z}$ ، ومن أمثله : $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$.

العدد الفردي : هو العدد الصحيح الذي باقي قسمته على : 2 يساوي : 1 ، ويمكن كتابته على

الصورة : $2n + 1$ حيث : $n \in \mathbb{Z}$ ، ومن أمثله : $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

خصائصها :

عند جمع أو طرح عددين زوجيين ، فإن الناتج عدد زوجي .

$$2n_1 \pm 2n_2 = 2\left(\underbrace{n_1 \pm n_2}_m\right) = 2m , m \in \mathbb{Z}$$

عند جمع أو طرح عددين فرديين ، فإن الناتج عدد زوجي .

$$(2n_1 \pm 1) \pm (2n_2 \pm 1) = 2n_1 \pm 2n_2 \pm 2 = 2\left(\underbrace{n_1 \pm n_2 \pm 1}_m\right) = 2m , m \in \mathbb{Z}$$

عند جمع أو طرح عدد زوجي مع عدد فردي ، فإن الناتج عدد فردي .

$$2n_1 \pm 2n_2 + 1 = 2\left(\underbrace{n_1 \pm n_2}_m\right) + 1 = 2m + 1 , m \in \mathbb{Z}$$

حاصل ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي :

$$2n_1 \times 2n_2 = 2\left(\underbrace{2n_1 \times n_2}_m\right) = 2m , m \in \mathbb{Z}$$

٨ حاصل ضرب عدد زوجي مع عدد فردي هو عدد زوجي :

$$(2n_1) \times (2n_2 + 1) = 4n_1n_2 + 2n_1 = 2 \left(\underbrace{n_1n_2 + n_1}_m \right) = 2m, m \in \mathbb{Z}$$

٨ حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي :

$$\begin{aligned} (2n_1 + 1) \times (2n_2 + 1) &= 4n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 1 \\ &= 2 \left(\underbrace{2n_1n_2 + n_1 + n_2}_m \right) + 1 \\ &= 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

٨ كل عدد زوجي محصور بين عددين فرديين متتاليين ، وكل عدد فردي محصور بين عددين زوجيين متتاليين .

(8) العدد المربع الكامل ، والمكعب الكامل : *The Square and Cube number*

نقول عند عددٍ : a أنه مربع كامل إذا كان يمكن كتابته على الصورة : $a = n^2, a, n \in \mathbb{R}$. مثل العدد : $25 = 5^2$ ، والعدد : $49 = 7^2$. كذلك نقول عن عددٍ : b أنه مكعب كامل إذا كان يمكن كتابته على الصورة : $b = m^3, b, m \in \mathbb{R}$. مثل العدد : $27 = 3^3$.

أيضاً يقال عن عددٍ أنه خالٍ من التربع : *square free* إذا لم يكن في قواسمه الموجبة عدد مربع كامل مثل العدد : 15 خالٍ من التربع لأن قواسمه : 3, 5 . بينما العدد : 20 غير خالٍ من التربع لأن في قواسمه : $4 = 2^2$.

(9) قابلية القسمة على الأعداد : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13

قابلية القسمة على : 2 :

يقبل أي عدد القسمة على : 2 إذا كان أحاده عدد زوجي . مثل الأعداد : 246 ، 456456456 ، 919191914 ، 57898 ، 1432 ، فجميعها تقبل القسمة على : 2 لأن أحادها عدد زوجي . بينما الأعداد : 987789 ، 567563 ، 44441 جميعها لا تقبل القسمة على : 2 لأن أحادها عدد غير زوجي .

قابلية القسمة على : 3 :

يقبل أي عدد القسمة على : 3 إذا كان مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 . مثل العدد : 1362 عند جمع خاناته سنحصل على : $12 = 1 + 3 + 6 + 2$ ، و 12 يقبل القسمة على : 3 . إذاً : 1362 يقبل القسمة على : 3 ، ومن الأمثلة الأخرى : 5673209871 ، 2010 ، 1431 ، بينما : 2011 لا يقبل القسمة على : 3 لأن مجموع خاناته : $4 = 2 + 0 + 1 + 1$ ، 4 لا يقبل القسمة على : 3 .

قابلية القسمة على : 4 :

يقبل أي عدد القسمة على : 4 إذا كان آحاده مع عشراته يقبل القسمة على : 4 . مثل الأعداد : 116 ، 244 ، 1432 ، 5858589436 فكلها تقبل القسمة على : 4 لأن الأعداد : 16, 44, 32, 36 تقبل القسمة على : 4 ، وهي تمثل الآحاد ، والعشرات .

قابلية القسمة على : 5 :

يقبل أي عدد القسمة على : 5 إذا كان آحاده أحد العددين : 5 ، 0 . مثل الأعداد : 2010 ، 456825 ، 1430 ، 58585 فكلها تقبل القسمة على : 5 .

قابلية القسمة على : 6 :

يقبل أي عدد القسمة على : 6 إذا كان يقبل القسمة على العددين : 3 ، 2 معاً . لأجل هذا إذا كان العدد يحقق قابلية القسمة على : 2 ، ويحقق قابلية القسمة على : 3 ، فهو يقبل القسمة على : 6 .

قابلية القسمة على : 7 :

سندرس طريقتين لقابلية القسمة على : 7 كالتالي :

الطريقة الأولى : نضرب آحاد العدد المطلوب دراسته في : 2 ثم نطرح الناتج من باقي العدد المطلوب ، ونستمر في هذه الخطوة حتى نحصل على عدد يقبل القسمة على : 7 .

سندرس قابلية قسمة العدد : 504 على : 7 ، ونطبق نفس الطريقة . الآحاد : 4 نضربه في : 2 سنحصل على : 8 نطرحه من المتبقي من العدد بدون الآحاد : $50 - 8 = 42$ وهذا عدد يقبل القسمة على : 7 . إذاً : 504 تقبل القسمة على : 7 .

مثال آخر : العدد : 5005

الآحاد : 5 نضربه في : 2 سنحصل على : 10 نطرحه من المتبقي من العدد بدون الآحاد : $500 - 10 = 490$. وهذا عدد يقبل القسمة على : 7 لأنه عبارة عن : 49×10 .

ولكن هذه الطريقة قد تكون غير مجدية ، وطويلة إذا كانت الأعداد كبيرة جداً ، فالتأخذ الطريقة الثانية .

الطريقة الثاني : وهي تنسب لعالم الرياضيات **بليز باسكال** وهي طريقة رائعة بالذات للأعداد الكبيرة ، وفكرتها كالتالي : ليكن لدينا العدد على الصورة : $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1$ حيث : $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1$ تمثل خانات العدد ، و a_1 خانة الآحاد . لبحث قابلية قسمته على : 7 نتبع التالي : $a_1 + 3a_2 + 2a_3 - a_4 - 3a_5 - 2a_6 + \dots$ وهكذا نستم بأخذ كل ثلاث خانات الأولى موجبة ، والثلاث الثانية سالبة مع الضرب ، وبعد إجراء الضرب ، والجمع ، والطرح ، فإذا كان الناتج يقبل القسمة على : 7 ، فالعدد يقبل القسمة على : 7 ، ولعل المثال التالي يوضح الطريقة :

مثال : ابحث قابلية قسمة العدد : 12324312 على : 7 .

نطبق : $(2 + 3 \times 1 + 2 \times 3) - (4 + 3 \times 2 + 2 \times 3) + (2 + 3 \times 1)$ نجمع الناتج بعد الضرب :

$$(2 + 3 \times 1 + 2 \times 3) - (4 + 3 \times 2 + 2 \times 3) + (2 + 3 \times 1) = 11 - 16 + 5 = 0$$

والصفر عدد يقبل القسمة على : 7

مثال آخر : ابحث قابلية قسمة العدد : 54911654196 على : 7 .

نطبق : $(6 + 3 \times 9 + 2 \times 1) - (4 + 3 \times 5 + 2 \times 6) + (1 + 3 \times 1 + 2 \times 9) - (4 + 3 \times 5)$ نجمع الناتج بعد الضرب ، فنحصل على : $35 - 31 + 22 - 19 = 7$ ، و هو عدد يقبل القسمة على : 7 . إذاً العدد : 54911654196 يقبل القسمة على : 7 .

قابلية القسمة على : 8 :

يقبل العدد القسمة على : 8 إذا كان العدد المكون من آحاده ، وعشراته ، ومئاته يقبل القسمة على : 8 ، أو يقبل العدد على : 2 ثلاث مرات . أو ممكن أن نقول : إذا كان العدد المكون من الخانات الثلاث الأولى يقبل القسمة على : 8 .

مثل العدد : 1432 يقبل القسمة على : 8 لأن العدد : 432 يقبل القسمة على : 8 أو بقسمة العدد : 432 على : 2 ثلاث مرات سنجد أن : $\frac{432}{2} = 216$, $\frac{216}{2} = 108$, $\frac{108}{2} = 54$. إذاً العدد يقبل القسمة على : 8 .

قابلية القسمة على : 9 :

يقبل العدد القسمة على : 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على : 9 . مثل فكرة العدد : 3 .

قابلية القسمة على : 10 :

يقبل العدد القسمة على : 10 إذا كان آحاده : 0 .

قابلية القسمة على : 11 :

يقبل العدد القسمة على : 11 إذا كان حاصل طرح مجموع المنازل الفردية من مجموع المنازل الزوجية عدد يقبل القسمة على : 11 .

مثال : العدد : 1433432 يقبل القسمة على : 11 لأن : $(1 + 3 + 4 + 2) - (4 + 3 + 3) = 0$ ، والصفر يقبل القسمة على : 11 بينما العدد : 19372395 لا يقبل القسمة على : 11 لأن طرح مجموع المنازل الفردية من مجموع المنازل الزوجية يساوي : 9 ، وهو عدد لا يقبل القسمة على : 11 .

قابلية القسمة على : 13 :

لدراسة قابلية قسمة أي عدد على : 13 نتبع التالي نضرب آحاد العدد المطلوب دراسته في : 9 ثم نطرح الناتج من باقي العدد المطلوب ، ونستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على عدد يقبل القسمة على : 9 .

فمثلاً العدد : 1768 يقبل القسمة على : 13 ، لأن : $1768 - 9 \times 8 = 1768 - 72 = 104 = 13 \times 8$.

إذاً العدد يقبل القسمة على : 13 .

(10) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أثبت أن : $a - b$ تقسم : $a^2 - b^2$ لكل : $a \neq b$.

الحل :

بتحليل المقدار : $a^2 - b^2$ باستخدام متطابقة فرق بين مربعين سينتهي الحل بسهولة .

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ إذاً : $a - b$ عامل من عوامل المقدار : $a^2 - b^2$. إذاً هو قاسم له .

(2) إذا كان $x \neq -y \neq 0 \in \mathbb{Z}$ أثبت أن : $x + y \mid x^3 + y^3$.

الحل :

بتذكر متطابقة مجموع مكعبين نحصل على المراد :

الآن نعلم أن : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ لاحظ أن : $x + y$ عامل من عوامل المقدار :

$x^3 + y^3$ هذا يعني أن : $x + y \mid x^3 + y^3$.

(3) أثبت أن : $2010^{2k} - 1$ يقبل القسمة على 2009 ، و 2011 حيث $k \geq 1$ عدد صحيح .

الحل :

باستخدام المتطابقة : $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$

نجد أن :

$$\begin{aligned} 2010^{2k} - 1 &= (2010^2)^k - 1 \\ &= (2010^2 - 1)(2010^{k-1} + 2010^{k-2} + \dots + 1) \\ &= (2010 - 1)(2010 + 1)(2010^{k-1} + 2010^{k-2} + \dots + 1) \\ &= 2009.2011(2010^{k-1} + 2010^{k-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

واضح أن : 2009 ، و 2011 عوامل للمقدار : $2010^{2k} - 1$. إذاً معناه أن : 2009 ، و 2011 قواسم

للمقدار : $2010^{2k} - 1$.

لاحظ أن : الفكرة الرئيسية في حل هذه الأمثلة ، وأمثلة غيرها قادمة هي التحليل ، وهي فكرة رئيسية في

إثبات قابلية القسمة .

(4) إذا كان : 1432 تقسم العدد : $a + b$. حيث : a ، b أعداد صحيحة ، فأى الأعداد التالية يقبل القسمة على : 179 مع التعليل :

$$a^2 - b^2 , a^2b + ab^2 , a^2 + b^2 , a^3 + b^3 , a^3 - b^3 , a^2 + 2ab + b^2$$

الحل :

الفكرة تعتمد على التحليل مع ملاحظة أن : 179 عامل من عوامل : 1432 .

(5) أثبت أن العدد : 2^m عبارة عن حاصل جمع عددين فرديين متتالين .

الحل :

نعلم أن كل عدد زوجي محصور بين عددين فرديين متتالين ، و 2^m إذاً :
 $2^m = 2 \times 2^{m-1} = 2^{m-1} + 2^{m-1} = (2^{m-1} - 1) + (2^{m-1} + 1)$ عدنان فرديان .

(6) أثبت أن العدد : 3^m عبارة عن حاصل جمع ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .

الحل :

نفرض أن الأعداد المتتالية هي : $k - 1$ ، k ، $k + 1$: $k - 1 + k + k + 1 = 3k$:
 إذاً : بقسمة : 3^m على : 3 سنحصل على : 3^{m-1} . إذاً الأعداد هي : $3^{m-1} - 1$ ، 3^{m-1} ، $3^{m-1} + 1$:
 بجمعها :

$$(3^{m-1} - 1) + (3^{m-1}) + (3^{m-1} + 1) = 3 \times 3^{m-1} = 3^m$$

وهو المطلوب .

(7) أثبت أن العدد : $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$ مربع كامل .

الحل :

نعلم أن : $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$: إذاً :

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{(n + 1)^2}{n^2} = \left(\frac{n + 1}{n}\right)^2$$

وهو مقدار مربع كامل .

(8) أثبت أن : $3^{2n} + 7 \mid 8$ لكل : $n \in \mathbb{Z}^+$.

الحل :

نفكر دوماً بطريقة ما للتحليل يكون فيها : 8 عامل من عوامل العدد المطلوب . لاحظ :

$$\begin{aligned} 3^{2n} + 7 &= (3^{2n} - 1) + 8 \\ &= \left((3^2)^n - 1 \right) + 8 \\ &= (9^n - 1) + 8 \\ &= (9 - 1)(9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 1) + 8 \\ &= 8(9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 2) \end{aligned}$$

واضح أن : 8 من عوامل المقدار . هذا يعني أن : $8 \mid 3^{2n} + 7$.

(9) أثبت أن : $2010^k + 1 \nmid 5$ لكل : $k \in \mathbb{Z}^+$.

الحل :

لاحظ أن : 5 من عوامل : 2010 إذًا : $2010^k \mid 5$ ، وهذا يعني أن : $2010^k + 1 \nmid 5$ لأنه سيوجد باقي هو الواحد .

(10) إذا كانت : $3x + 2 \mid 7$ أثبت أن : $15x^2 - 11x - 14 \mid 7$.

الحل :

التحليل ، والتحليل ، والتحليل : $15x^2 - 11x - 14 = (3x + 2)(5x - 7)$.
ولكن : $3x + 2 \mid 7$ هذا يعني أن : $7 \mid 15x^2 - 11x - 14$.

(11) إذا كان : $a \mid b$ ، و $a \mid b \pm c$ ، فإن $a \mid c$.

الحل :

سؤال صغير جداً ، ولكن جميل جداً ! ، وقد نحتاج لفكرته لاحقاً ، فنذكر ؟

بما أن : $a \mid b \Rightarrow b = ab'$ ، كذلك بما أن : $a \mid b \pm c \Rightarrow b \pm c = aa'$ الآن بالتعويض بقيمة : b سنجد أن : $ab' \pm c = aa'$ ، ومنه سنجد أن : $c = a(a' \pm b')$ ، ولكن : $a' \pm b'$ عدد صحيح . إذًا : $a \mid c$.

ملاحظة : هذه العلاقة مهمة جداً ، ومفهومها إذا قَسَمَ عددٌ أحدَ عددين ، وحاصل جمعهما ، أو طرحهما ، فهو يقسم العدد الآخر .

(12) أوجد مجموع كل الأعداد الصحيحة الموجبة : n بحيث أن : n تقسم : $n^2 + n + 2$.

الحل :

نلاحظ أن : n تقسم : $n^2 + n$ هذا معنى ذلك أن : n تقسم المقدار إذا كانت : n تقسم : 2 ومنه سنجد أن الأعداد التي تقسم : 2 فقط هي : 1, 2 ومجموعهما يساوي : 3 .

(13) أوجد كل الأعداد الصحيحة الموجبة : n بحيث : $n^2 + 1 \mid n + 1$.

الحل :

كيف أبدأ ؟ لاحظ أن المقسوم عليه : $n + 1$. إذاً ما نريد أن يكون : $n + 1$ عامل من عوامل المقسوم . لماذا لانفكر بمطابقة فرق بين مربعين ؟! إذاً ، فالتحاول :

$$n^2 + 1 = n^2 - 1 + 2 = (n - 1)(n + 1) + 2$$

أظن الحل اتضح وانتهى . الآن لاحظ أن : $(n - 1)(n + 1) \mid n + 1$ فقط يكفي أن نوجد القيم التي تحقق أن : $n + 1 \mid 2$ ، وقواسم : 2 هي : $\pm 1, \pm 2$ ، وبمساواتها بـ $n + 1$ سنجد أن القيم التي تحقق هي فقط : $n = 1$ لأن المطلوب أن تكون : n صحيحة موجبة .

طريقة أخرى : $\frac{n^2 + 1}{n + 1} = \frac{(n + 1)^2 - 2n}{n + 1}$ إذاً المطلوب : $n + 1 \mid 2n$ ، وهذا يعني أن :

$$\frac{2n}{n + 1} = \frac{2(n + 1) - 2}{n + 1} \Rightarrow n + 1 \mid 2$$

، وإكمال الحل كما هو في الأعلى .

(14) ماهو عدد الأعداد المحصورة بين : 1 ، و 1,000,000 ، وتكون مربعة كاملة وليست مكعب كامل .

الحل :

يكون العدد مربع كامل ومكعب كامل إذا كان مرفوع للقوة : 6 .

إذاً : $10^3 = 1000^2 = 1,000,000$ واضح الآن أن عدد الأعداد المربعة الكاملة تساوي : 1000 عدد ، وعدد الأعداد المربعة الكاملة تساوي : 10 ومنه سنجد المطلوب : $1000 - 10 = 990$.

(11) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أثبت أن : 5^k يمكن كتابتها كحاصل جمع خمسة أعداد متتالية .

(2) أوجد قيمة : k بحيث أن :

$$(k - 1005) + (k - 1004) + \dots + (k - 1) + k + (k + 1) + \dots + (k + 1004) + (k + 1005) = 2011^n$$

(3) أثبت أن أي عدد مربع كامل يكتب على الصورة : $4m, 4m + 1$ ، $m \in \mathbb{Z}^+$.

(4) أثبت أن : 5 تقسم العدد : $1 + 2^{1431} + 3^{1431} + 4^{1431}$.

(5) أثبت أن : $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ لكل : $n \in \mathbb{Z}^+$.

(6) أوجد كل القيم الصحيحة : n التي تحقق : $n + 1431 \mid n + 2010$.

(7) أوجد أكبر عدد صحيح موجب : n يحقق أن : $n + 10 \mid n^3 + 100$.

(8) أثبت أن : $11^{10} - 1$ يقبل القسمة على : 100 .

(9) إذا كان $2^n \parallel 3^{2^{10}} - 1$ أوجد n .

(10) أثبت أن حاصل ضرب أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية لا يمكن أن يكون مربع كامل .

(11) أثبت أن : $1 + 2^{1431} + 3^{1431} + \dots + 2010^{1431}$ يقبل القسمة على : 2011 .

(12) أثبت أن : $2222^{5555} + 5555^{2222}$ يقبل القسمة على : 7 .

(13) إذا كان : $a = x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \dots + x^{1111} + 1$ ، و

عدد صحيح $\frac{a}{b}$: أثبت أن $b = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$

(14) أثبت لكل عدد صحيح موجب : n ، فإن : $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

(15) أوجد جميع الأعداد الصحيحة : k التي تجعل : $k^2 + k + 1$ مربعاً كاملاً .

(16) أثبت أن : $5^k + 3$ يقبل القسمة على : 4 . لكل : $k \in \mathbb{Z}^+$.

(17) إذا كان : $19 \mid 3x + 7y$. أثبت أن : $13 \mid 43x + 75y$.

المحاضرة الثانية

الأعداد الأولية ، والنظرية الأساسية في الحساب :

The Prime Number and The Fundamental Theorem of Arithmetic

(1) الأعداد الأولية : *prime number*

لو بحثنا عن القواسم الموجبة للعدد : 23 ، فلن نجد سوى الواحد ، والعدد نفسه ، ومثل هذه الأعداد التي لها هذه الخاصية تسمى الأعداد الأولية ، فما هي الأعداد الأولية ؟ ، وما هي خصائصها ؟ .

تعريف :

نسمي العدد الصحيح : $p > 1$ عدداً أولياً *prime number* إذا كان له قاسمان موجبان فقط هما : $p, 1$.

بينما نسمي العدد الصحيح : n عدداً مؤلفاً *cpmposite number* إذا لم يكن أولياً ، وكان له أكثر من قاسمين موجبين مثل العدد : 24 .

من أمثلة الأعداد الأولية : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 39, 41 .

لاحظ أن :

🔑 العدد : 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد بينما كل الأعداد الأولية الأخرى فردية .

🔑 العددان : 2, 3 هما العددان الأوليان الوحيدان المتتاليان .

(2) النظرية الأساسية في الحساب : *Fundamental Theorem of Arithmetic*

يمكن كتابة كل عدد صحيح : $n > 1$ بصورة ، وحيدة كحاصل ضري قوى أعداد أولية على الصورة :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

حيث : p_1, p_2, \dots, p_k أعداد أولية ، و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}^+$.

ومفهوم النظرية الأساسية في الحساب أن أبسط صورة للعدد الصحيح هي تحليله لحاصل ضرب أعداد قوى أعداد أولية ، لكون العدد الأولي لا يمكن تحليله لأبسط من صورته لعدم وجود قواسم له سوى الواحد ، ونفسه.

(3) خصائص الأعداد الأولية :

ليكن p : عدداً أولياً ، و $a, b \in \mathbb{Z}$. عندئذ :

(1) إذا كان : $p \mid ab$ ، فإن : $p \mid a$ أو $p \mid b$.

(2) كل عدد صحيح : $n > 1$ له قاسم أولي .

(3) كل عدد صحيح مؤلف : $n > 1$ له قاسم أولي p : بحيث : $p \leq \sqrt{n}$.

(4) يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية .

إثبات هذه الخصائص :

(1) إذا كان : $p \nmid a$ هذا يعني أن أكبر قاسم لـ a ، هو الواحد لأن : p أولياً ، ولكن : $p \mid ab$ إذاً : $p \mid b$ وهو المطلوب .

(2) نفرض أن : p أصغر قاسم موجب للعدد : n . إذا كان : $p > 1$ فإن : p عدد أولي .

نفرض أن : p له قاسم : q حيث : $1 < q < p$ إذاً : $q \mid p$ ، ولكن : $p \mid n$. إذاً : $q \mid n$. إذاً p ليس أصغر قاسم لـ n أكبر من الواحد ، وهذا تعارض مع الفرض . إذاً يجب أن يكون : p عدد أولي .

إثبات آخر : إذا كان : n أولياً ، فإن : $n \mid n$ ، وبالتالي انتهى المطلوب ، وإذا لم يكن أولياً ، فمن النظرية الأساسية في الحساب ، فإننا يمكن أن نكتب العدد : n كحاصل ضرب قوى أعداد أولية ، وبالتالي : $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ، وهذا يعني أن : $p_1 \mid n$ ، و p_1 عدد أولي وبالتالي انتهى المطلوب .

(3) بما أن n عدد غير أولي من الخاصية الثانية يوجد قاسم أولي لـ n ، وليكن p . فالفرض أن :
 $n = ab$ حيث $1 < a \leq b$ ، وبالتالي : $n \geq a^2$ ، وبما أن p قاسم ، هذا يعني أن : $p \leq a$ إذاً :
 $\sqrt{n} \geq \sqrt{a^2} = a \geq p$ ، بالتالي انتهى المطلوب .

(4) نفرض أن الأعداد الأولية المنتهية ، وعددها : $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ على الصورة :
 $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$: نفرض أن العدد : N عدد غير أولي .
واضح أن : $N > p_n$. إذاً يوجد قاسم أولي لـ N ، وليكن p_i ، حيث $1 \leq i \leq n$: أصغر قاسم .
إذاً : $p_i \mid N$ ، وأيضاً : $p_i \mid N - 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ ، وهذا يعني أن :
 $p_i \mid N - (N - 1) = 1$ ، ولكن هذا يعارض كون p_i عدد أولي . إذاً الفرض الابتدائي خاطئ ، وبالتالي
الأعداد الأولية غير منتهية .

استنتاج مهم :

من الخاصية الأخيرة يمكننا اختبار أولية العدد : n خصوصاً إذا كان صغيراً ، وذلك بإيجاد أقرب عدد صحيح
لجذر : \sqrt{n} ، ثم دراسة الأعداد الأولية التي أصغر من جذر العدد ، فإذا كانت تقسم العدد ، فالعدد غير
أولي ، وإن لم تقسم ، فالعدد أولي ، وهذا مثال يوضح الخطوات :

مثال :

حدد ما إذا كانت الأعداد التالية أولية : 301 , 331 , 387 , 1432 , 2011 .

العدد : 301 :

نبحث عن الأعداد الأولية التي أصغر : $\sqrt{301}$. نلاحظ أن : $\sqrt{301} < \sqrt{324} = 18$. إذاً الأعداد الأولية
التي أصغر : 18 ، وهي : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ، وسنجد أن : 7 تقسم : 301 . إذاً العدد غير أولي .

العدد : 331 :

نبحث عن الأعداد الأولية التي أصغر : $\sqrt{331}$. نلاحظ أن : $\sqrt{301} < \sqrt{400} = 20$. إذاً الأعداد الأولية
التي أصغر : 20 ، وهي : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 . سنجد أن جميعها
لا تقسم العدد : 331 . إذاً العدد : 331 عدد أولي لأنه ليس له قاسم أولي يحقق : $p \leq \sqrt{331}$.

نترك بقية الأعداد للطالب ، وينفس الفكرة .

(4) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أوجد كل الأعداد الصحيح : n التي تحقق أن : $3n - 4$, $4n - 5$, $5n - 3$ جميعها أعداد أولية

الحل :

بجمع الأعداد الثلاثة سنلاحظ أن : $3n - 4 + 4n - 5 + 5n - 3 = 12n - 12 = 2(6n - 6)$ حاصل الجمع عدد زوجي ، ونعلم أن حاصل جمع عددين فرديين عدد زوجي ، وحاصل جمع عدد فردي وزوجي عدد فردي ، وهذا يعني أن أحد الأعداد الثلاثة زوجي . إذاً أحدها يساوي : 2 بمساواة الأعداد الثلاثة بـ 2 سنجد أن : $5n - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{n = 1}$, $3n - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{n = 2}$, $4n - 5$ لن يتحقق أن : n عدد صحيح .

بالتحقق عن قيم : $n = 1, 2$ في الأعداد الثلاثة لن يتحقق كونها أولية إلا عند : $n = 2$.

(2) أوجد الأعداد الأولية : p , q التي تحقق أن للمعادلة التربيعية : $x^2 - px + q = 0$ جذرين صحيحين مختلفين .

الحل :

نفرض أن : a, b حيث : $a < b$ جذرا المعادلة . إذاً : $x^2 - px + q = (x - a)(x - b)$. بالفك ، والمساواة :

$x^2 - px + q = x^2 - (a + b)x + ab$ أي أن : $p = a + b$ ، ولكن أحدهما يساوي الواحد أي أن : $a = 1$. إذاً : $q = b$, $p = 1 + b$ ، وهذان عدداً أوليان متتاليان ، ولا يوجد عدداً أوليان متتاليان سوى : 2, 3 . إذاً : $q = 2$, $p = 3$.

(3) أوجد : 20 عدد مؤلفاً متتالياً .

الحل :

بالاستفادة من مضروب العشرين : $20!$ بسهولة سنجد أن :

$$20! + 2, 20! + 2, 20! + 2, \dots, 20! + 21$$

مع ملاحظة أن هذه الأعداد يمكن تحليلها ، وبالتالي ليست أولية ، وإنما أعداد مؤلفة .

(4) أثبت أن : $n^3 + 1$ عدد مؤلف . لكل : $n > 1$.

الحل :

بتحليل متطابقة مجموع مكعبين سنجد أن : $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ ، وهذا يعني أن المقدار يمكن تحليله لحاصل ضرب عاملين ، أي له أكثر من قاسمين .

(5) أثبت أن : $8^n + 1$ عدد مؤلف . لكل : $n \geq 1$.

الحل :

يمكن إعادة كتابة العدد على الصورة : $(2^3)^n + 1 = (2^n)^3 + 1$ ، الآن بتحليل متطابقة مجموع مكعبين سنجد أن : $(2^3)^n + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ ، وبالتالي هذا عدد مؤلف يمكن تحليله .

(6) أوجد جميع الأعداد الأولية : p بحيث يكون : $17p + 1$ عدد أولي .

الحل :

نفرض أن : $17p + 1 = k^2 \Rightarrow 17p = k^2 - 1 \Rightarrow 17p = (k - 1)(k + 1)$ ، وبما أن : p ، 17 أوليان . إذاً لدينا الحالتان :

إما : $p = 19 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow k - 1 = 17$ أو أن : $p = 15 \Rightarrow k = 16 \Rightarrow k + 1 = 17$ ، وهذا لا يحقق لأن : p عدد أولي . إذاً توجد قيمة واحدة لـ p تحقق المطلوب ، وهي : $p = 19$.

(7) أثبت أن : 100 تقسم : $11^{10} - 1$.

الحل :

نتذكر مفكوك ذات الحدين كالتالي :

$$\begin{aligned} 11^{10} - 1 &= (10 + 1)^{10} - 1 \\ &= (10^{10} + 10 \times 10^9 + \dots + 10 \times 10 + 1) - 1 \\ &= 10^{10} + 10 \times 10^9 + \dots + 10 \times 10 \\ &= 100 \times k \end{aligned}$$

لاحظ أننا استطعنا أخذ : 100 كعامل مشترك بين كل الحدود .

(8) أوجد كل الأعداد الأولية : p التي تحقق : $p + 20$, $p + 10$ أعداد أولية في آنٍ واحد .

الحل :

نلاحظ عند : $p = 2$ لا تحقق . بينما : $p = 3$ تحقق أن كلاهما أعداد أولية ، وهما : 23 , 13 .
إذاً سنبحث عن قيمة : $p > 3$ ، وبالتالي يمكن كتابة : p على الصورة : $3k + 2$, $3k + 1$ بالتعويض
عن : $p = 3k + 1$ في العدد : $p + 20$ سنلاحظ أن : $p + 20 = 3k + 1 + 20 = 3(k + 7)$ وهذا
عدد غير أولي ، وبالتعويض عن : $p = 3k + 2$ في العدد : $p + 10$ يصبح على الصورة :
 $p + 10 = 3k + 2 + 10 = 3(k + 4)$ وهذا عدد غير أولي .
إذاً توجد قيمة واحدة فقط تحقق أن العددين أوليان في آنٍ واحد وهي : $p = 3$.

(9) أوجد أكبر قاسم أولي للعدد : 1001001001 .

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورته العشرية :

$$\begin{aligned} 1001001001 &= 1001 \times 10^6 + 1001 \\ &= 1001 \times (10^6 + 1) \\ &= 7 \times 11 \times 13 \times ((10^2)^3 + 1) \\ &= 7 \times 11 \times 13 \times (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1) \\ &= 7 \times 11 \times 13 \times 101 \times 9901 \end{aligned}$$

إذاً أكبر قاسم أولي هو : 9901 .

(10) العدد : 270000001 له بالضبط أربعة عوامل أولية أوجد مجموعها .

الحل :

يمكن إعادة كتابة العدد على الصورة : $270000001 = 270000000 + 1 = (300)^3 + 1$.

للتبسيط نفرض أن : $x = 300$ يصبح العدد على الصورة : $x^3 + 1$ بالتحليل باستخدام متطابقة مجموع مكعبين نجد أن :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 2x + 1 - 3x) \\ &= (x + 1)((x + 1)^2 - 3x) \end{aligned}$$

بإرجاع قيمة : x سنجد أن :

$$\begin{aligned} (x + 1)((x + 1)^2 - 3x) &= (300 + 1)((300 + 1)^2 - 3 \times 300) \\ &= 301 \times ((301)^2 - 900) \\ &= 7 \times 43 \times ((301)^2 - (30)^2) \\ &= 7 \times 43 \times ((301)^2 - (30)^2) \\ &= 7 \times 43 \times (301 + 30)(301 - 30) \\ &= 7 \times 43 \times 331 \times 271 \end{aligned}$$

وهذه أربعة أعداد أولية ، ومجموعها يساوي : $7 + 43 + 331 + 271 = 652$.

(11) أثبت أن العدد : $2011^4 + 4^{1433}$ غير أولي .

الحل :

سوف نستفيد من المتطابقة : $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.

يمكن أن نعيد كتابة العدد على الصورة :

$$2011^4 + 4^{1433} = 2011^4 + 4 \times (4^{1432}) = (2011)^4 + 4 \times (4^{358})^4$$

إذاً أصبح العدد على صورة المتطابقة في الأعلى حيث : $a = 2011$, $b = 4^{358}$. إذاً يمكن تحليله ، وهذا يعني أنه غير أولي فله قواسم أخرى غير نفسه ، والواحد .

(12) أوجد جميع الأعداد الأولية : p التي تحقق أن : $p^2 + 2^p$ عدد أولي .

الحل :

بالتجربة سنجد أن أول عدد أولي يحقق عند : $p = 3$ ، ويساوي : $3^2 + 2^3 = 17$.

سنبحث الحالة التي يكون فيها : $p > 3$ ، ولكن كل الأعداد الأولية الأخرى فردية ، فيمكن كتابتها على الصورة : $p = 3k \pm 1$.

نعيد كتابة العدد المطلوب على الصورة : $(p^2 - 1) + (2^p + 1) = (p - 1)(p + 1) + (2^p + 1)$.

العدد : $(p - 1)(p + 1)$ يقبل القسمة على : 3 ، وذلك بالتعويض عن : $p = 3k \pm 1$. إذاً المطلوب ضمن العدد : $2^p + 1$ ، ولكن هذا العدد يقبل القسمة على : 3 لأنه يمكن تحليله لكل : $p > 3$ عدد فردي ، وذلك من تحليل المتطابقة : $(a^{2n+1} - b^{2n+1}) = (a - b)(a^{2n}b^0 + a^{2n-1}b^1 + \dots + a^1b^{2n-1} + a^0b^{2n})$. إذاً القيمة الوحيدة التي تحقق المطلوب هي : $p = 3$.

(13) أثبت أن مربع أي عدد أولي : $p > 3$ عند قسمته على : 12 ، فإن الباقي : 1 .

الحل :

أي عدد أولي : $p > 3$ لن يخرج عن إحدى الصورتين : $p = 6k \pm 1$ لأن الصور الأخرى : $6k + 2$ ، $6k + 3$ ، $6k + 4$ أعداد مؤلفة . بتربيع هاتين الصورتين نجد أن :

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 12(3k^2 + k) + 1$$

وهذا عدد باقٍ قسمته على : 12 يساوي الواحد .

(14) أثبت أن : $n^4 + 4$ لا يكون عدداً أولياً إلا إذا كان : $n = 1$.

الحل :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

إذاً المقدار لن يكون عدداً أولياً إلا إذا كان : $n = 1$ ، وعند قيم أخرى لـ n سيكون العدد قابل للتحليل .

(5) مسائل إضافية على الدرس :

- (1) أثبت أن أي عدد أولي : $p > 3$ عند قسمة مربعة على : 12 ، فإن الباقي دوماً يساوي الواحد .
 - (2) أوجد كل الأعداد الصحيحة : a, b التي تحقق : $a^4 + 4b^4$ عدد أولي .
 - (3) إذا كان : a, b, c أعداد صحيحة موجبة تحقق : $a^2 + b^2 = c^2$ أثبت أن : a ، أو b عدد زوجي .
 - (4) أثبت أن : $n^4 + 4^n$ عدد مؤلف لكل : $n \geq 2$.
 - (5) أوجد جميع الأعداد الأولية : p التي تحقق المعادلة : $p^2 = n^3 + 1$ لكل : $n \in \mathbb{Z}$.
 - (6) أوجد العوامل الأولية للعدد : 343000001 .
 - (7) أوجد كل الأعداد الأولية : p التي تجعل الأعداد التالية أولية أيضاً :
- $$p + 4 , p + 6 , p + 10 , p + 12 , p + 16 , p + 22$$
- (9) أثبت أن العدد : $545^4 + 4^{545}$ غير أولي .
 - (10) تحقق مع الإثبات هل العدد : 1211112111121 عدد أولي .
 - (11) إذا كان : p عدد أولي . أثبت أن أحد العددين : $8p + 1$ ، $8p - 1$ أولي ، والآخر عدد مؤلف .
 - (12) ماهو أصغر عدد أولي يقسم العدد : $5^{7^{10^{7^{10}}}} + 1$.
 - (13) أوجد عدد الأعداد الأولية المختلفة التي تقسم حاصل الضرب : $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10$.
 - (14) أوجد جميع الأعداد الأولية : p بحيث يوجد عدد أولي : q يحقق أن : $p^2 + pq + q^2$ مربع كامل .
 - (15) العدد : 1002004008016032 له عامل أولي : $p > 250000$ أوجد : p .
 - (16) افرض أن : n عدد صحيح موجب أثبت أن : $2^{4n+2} + 1$ عدد غير أولي .
 - (17) أوجد جميع العوامل الأولية للعدد : $3^{18} - 2^{18}$.

المحاضرة الثالثة

القاسم المشترك الأعظم

The greatest common divisor

(1) القاسم المشترك الأعظم : *greatest common divisor*

لو بحثنا في القواسم الموجبة المشتركة للعددين : 28 , 12 سنجد أن قواسم : 12 هي : 1, 2, 3, 4, 6, 12
بينما قواسم : 28 هي : 1, 2, 4, 7, 14, 28 سنجد أن القواسم المشتركة هي : 1, 2, 3 .
نقول أن العدد : 3 هو أكبر قاسم مشترك للعددين .

إذاً أكبر قاسم مشترك لعددين يسمى القاسم المشترك الأعظم ، ويطلق عليه اختصاراً : gcd ، وعادة
تستخدم الأقواس : (a, b) للدلالة على المعنى ، والمراد القاسم المشترك الأعظم للعددين : a, b .

تعريف :

ليكن : $a, b \in \mathbb{Z}$ أحدهما لا يساوي الصفر . نقول إن : $d \in \mathbb{Z}^+$ قاسم مشترك أعظم للعددين : a, b ،
ونكتب : $d = (a, b)$ أو $d = \gcd(a, b)$ إذا ، وإذا فقط :

(1) $d \mid a$ ، $d \mid b$. تعني أن : d يقسم كلا العددين .

(2) إذا كان : $c \mid a$ ، $c \mid b$ ، فإن : $c \leq d$. تعني إذا وجد أي قاسم آخر للعددين ، فإنه أصغر من :
القاسم المشترك الأعظم .

أمثله :

$$\gcd(8, 9) = 1 ، \gcd(6, 24) = 6 ، \gcd(56, 0) = 56 ، \text{ويمكن أن نعلم :}$$

$$\gcd(a, 0) = \gcd(0, a) = a ، a > 0 .$$

(2) أهم خواص القاسم المشترك الأعظم :

كل خواص القاسم التي ذكرناها في المحاضرة الأولى هي خواص للقاسم المشترك الأعظم لأجل هذا سندكر الأهم ، والمختصة للقاسم المشترك . ليكن a, b, c أعداد صحيحة عندئذ :

$$(1) \text{ إذا كان : } d_1 = (a, b) \text{ ، و } d_2 = (a, b) \text{ ، فإن : } d_1 = d_2 .$$

$$(2) \text{ إذا كان : } b = qa + r \text{ ، فإن : } (a, b) = (a, r) .$$

$$(3) \text{ gcd}(a, b) = \text{gcd}(-a, b) = \text{gcd}(a, -b) = \text{gcd}(-a, -b)$$

$$(4) \text{ إذا كان : } d = (a, b) \text{ ، فإنه يوجد : } x, y \in \mathbb{Z} \text{ يحققان أن : } a = dx, b = dy \text{ و } (x, y) = 1 .$$

$$(5) \text{ إذا كان : } a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ ، } b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} \text{ ، فإن : } \text{gcd}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$$

وسأتي مزيد توضيح لاستنتاج القاسم المشترك الأعظم عن طريق التحليل إلى عوامل في الفقرة القادمة .

إثبات هذه الخواص :

$$(1) \text{ إذا كان : } d_1 = (a, b) \text{ ، و } d_2 \text{ قاسم مشترك أعظم ، فمن التعريف : } d_1 \leq d_2 \text{ ، بالمثل إذا كان : } d_2 = (a, b) \text{ ، } d_1 \text{ قاسم مشترك أعظم ، فمن التعريف : } d_2 \leq d_1 \text{ ، وهذا تناقض . إذاً : } d_1 = d_2 .$$

$$(2) \text{ نفرض أن : } d_1 = (a, b) \text{ . من خصائص القاسم ، فإن : } d_1 \mid (b - aq) \text{ لأن } d_1 \mid b \text{ ، } d_1 \mid a \text{ . إذاً : } d_1 \mid r \text{ حيث : } r = b - aq \text{ . إذاً : } d_1 \leq (a, r)$$

$$\text{الآن : نفرض أن : } d_2 = (a, r) \text{ . إذاً : } d_2 \mid (qa + r) \text{ ، وهذا يعني أن : } d_2 \mid b \text{ لأن } b = qa + r \text{ . إذاً : } d_2 \leq (a, b) \text{ أي أن : } d_1 \leq d_2 \text{ و } d_2 \leq d_1 \text{ ، وهذا تناقض . إذاً : } d_1 = d_2 .$$

$$(3) \text{ سنثبت أن : } \text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(-a, b) \text{ ، بنفس الفكرة نستطيع أن نثبت البقية .}$$

$$\text{نفرض أن : } d_2 = (-a, b) \text{ ، } d_1 = (a, b) \text{ ، وهذا يقتضي : } -a = (-a')d_1 \Rightarrow a = a'd_1 \text{ ، ومنه سنجد أن : } d_1 \mid -a \text{ . إذاً : } d_1 \leq d_2 \text{ ، بنفس الفكرة سنجد أن : } d_2 \leq d_1 \text{ ، وبالتالي : } d_1 = d_2 .$$

وتكملة بقية الحالات بنفس الطريقة .

(4) نفرض : $\gcd(x, y) = d_1$. إذاً : $x = d_1 x', y = d_1 y'$ ، وبالتالي :

$a = dd_1 x', b = dd_1 y'$ ، وهذا يعني أن : $dd_1 \mid a, dd_1 \mid b$. إذاً يوجد عدد يقسم : a, b أكبر : d ، وهذا تعارض . إذاً : $(x, y) = 1$

(3) أمثلة على إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين بطريقة التحليل لعوامل :

لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بطريقة التحليل إلى عوامل . نقوم بتحليل العدد إلى عوامل الأولية ، وبعد ذلك ، فإن القاسم المشترك الأعظم هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة للعددين ذات الأس الأصغر .

(1) أوجد : $\gcd(220, 140)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 220 \\ 2 & 110 \\ 5 & 55 \\ 11 & 11 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 220 = 2^2 \times 5 \times 11 \quad , \quad \begin{array}{r|l} 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأصغر هي : $2^2 \times 5 = 20$.

إذاً : $\gcd(220, 140) = 20$.

(2) أوجد : $\gcd(1638, 2835)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1638 \\ 3 & 819 \\ 3 & 273 \\ 7 & 91 \\ 13 & 13 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 1638 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \quad , \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2835 \\ 3 & 945 \\ 3 & 315 \\ 3 & 105 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 2835 = 3^4 \times 5 \times 7$$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأصغر هي : $3^2 \times 7 = 63$.

إذاً : $\gcd(1638, 2835) = 63$.

(4) إيجاد القاسم المشترك الأعظم باستخدام خوارزمية القسمة :

لاحظ أن الطريقة السابقة في استنتاج القاسم المشترك الأعظم غير مجدية إذا كانت الأعداد كبيرة جداً لأجل هذا نلجأ إلى فكرة خوارزمية القسمة ، أو باستخدام الطرح المتكرر كالتالي :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $a > 0$. بحيث إذا قسمنا العدد : a على العدد : b ، فإنه يوجد عدنان $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث : $b = aq + r$ ، بشرط أن : $0 \leq r < a$.

$$\begin{aligned} b &= aq_1 + r_1 & , & \quad 0 \leq r_1 < a \\ a &= r_1q_2 + r_2 & , & \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 & , & \quad 0 \leq r_3 < r_2 \\ r_2 &= r_3q_4 + r_4 & , & \quad 0 \leq r_4 < r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_2 + r_k & , & \quad 0 \leq r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= r_kq_2 + r_{k+1} & , & \quad r_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

من الخاصية الثانية نعلم أنه إذا كان : $b = qa + r$ ، فإن : $(a, b) = (a, r)$. إذاً :

$$r_{k+1} = 0 : \text{ لأن } (a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = (r_{k-1}, r_k) = r_k$$

لاحظ أن : $r_{k+1} = 0$ لأن الباقي أصغر قيمة سيأخذها ، وهو الصفر كما شرحناه في خوارزمية القسمة سابقاً لأجل هذا نستمر في إجراء الخوارزمية حتى نحصل على باقي يساوي الصفر ، ويكون القاسم هو الباقي السابق.

لتوضيح الفكرة بمثال عددي : احسب : $\gcd(220, 140)$ باستخدام فكرة خوارزمية القسمة .

$$220 = 140 \times 1 + 80$$

$$140 = 80 \times 1 + 60$$

$$80 = 60 \times 1 + \boxed{20}$$

$$60 = 20 \times 3 + 0$$

وممكن أن نستنتجها باستخدام الطرح المتكرر ، وفكرتها نستمر في الطرح حتى نصل لعددين القاسم المشترك الأكبر بينهما العدد الأصغر أو الواحد كالتالي :

$$220 - 140 = 80 , \quad 140 - 80 = 60 , \quad 80 - 60 = 20 \Rightarrow \gcd(60, 20) = 20$$

$$\gcd(220, 140) = \gcd(140, 80) = \gcd(80, 60) = \gcd(60, 20) = 20 : \text{ إذاً } :$$

(5) تطبيقات لإيجاد القاسم المشترك الأعظم باستخدام خوارزمية القسمة :

(1) أوجد : $\gcd(2011, 1432)$.

الحل :

يأجراء الطرح المتكرر نجد أن :

$$\begin{aligned}\gcd(2011, 1432) &= \gcd(1432, 2011 - 1432) \\ &= \gcd(1432, 579) \\ &= \gcd(579, 1432 - 2 \times 579) \\ &= \gcd(579, 274) \\ &= \gcd(274, 579 - 2 \times 274) \\ &= \gcd(274, 31) \\ &= \gcd(31, 274 - 8 \times 31) \\ &= \gcd(31, 274 - 8 \times 31) \\ &= \gcd(31, 26) = 1\end{aligned}$$

لاحظ أن القاسم المشترك الأعظم يساوي الواحد لأن : 31 عدد أولي ولو وصلنا الطرح بنفس الفكرة سيكون آخر قاسم مشترك هو : $\gcd(26, 5) = \gcd(5, 26 - 5 \times 5) = \gcd(5, 1) = 1$.

تذكير : العدد : 2011 عدد أولي ، فكيف نثبت أنه ؟ سنتركه للقارئ .

(2) أوجد : $\gcd(2562, 348)$.

الحل :

سنقوم بحل هذا السؤال باستخدام خوارزمية القسمة مع ملاحظة أن الطرح المتكرر فكرة مستنتجة من خوارزمية القسمة ، ولكن لتنويع الأفكار :

$$\begin{aligned}2562 &= 348 \times 7 + 126 \\ 348 &= 126 \times 2 + 96 \\ 126 &= 96 \times 1 + 30 \\ 96 &= 30 \times 3 + \boxed{6} \\ 30 &= 6 \times 5 + 0\end{aligned}$$

إذاً : $\gcd(2562, 348) = 6$ ، ويمكن التأكد باستخدام التحليل إلى عوامل ، أو فكرة الطرح المتكرر .

(6) القاسم المشترك الأعظم لأكثر من عددين :

استطعنا في النقاط السابقة من إيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين ، فماذا عن أكثر من عددين ؟ .

مثلاً : لو أردنا إيجاد : $\gcd(24, 36, 21)$. لو وجدنا القواسم الموجبة لكل عدد ، فإن :

قواسم : 24 هي : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 .

قواسم : 36 هي : 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36 .

قواسم : 21 هي : 1, 3, 7, 21 .

لاحظ أن أكبر قاسم مشترك بين الأعداد الثلاثة هو : 3 .

أيضاً لاحظ أن : $\gcd(24, 36) = 12$ ، و $\gcd(12, 21) = 3$. إذاً ممكن أن نضع تعريف للقاسم المشترك الأعظم لأكثر من عددين كالتالي :

تعريف :

إذا كان : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $\gcd(a, b, c) = \gcd\left(\underbrace{\gcd(a, b)}_{d_1}, c\right) = \gcd(d_1, c) = d$.

مثال : $\gcd(14, 35, 12) = \gcd(\gcd(14, 35), 12) = \gcd(7, 12) = 1$

لاحظ أننا أوجدنا القاسم المشترك الأعظم للعددين الأولين : $\gcd(14, 35) = 7$ ، ثم نطبق خوارزمية القسمة بين الناتج مع العدد الثالث .

ممكن تطبيق نفس الفكرة مع أكثر من ثلاثة أعداد ، وسنضع التعريف التالي :

تعريف :

إذا كان : $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

ويمكن توضيحه على الصورة :

$$\begin{aligned} \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \gcd\left(\underbrace{\gcd(a_1, a_2)}_{d_1}, a_3, a_4, \dots, a_n\right) \\ &= \gcd\left(\underbrace{\gcd(d_1, a_3)}_{d_2}, a_4, a_5, \dots, a_n\right) \\ &= \dots = \gcd(d_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

(7) متطابقة بيزوه : Bézout Identity

وهي متطابقة جميلة ، ومهمة في حل نوعية خاصة من المعادلات الديوفنتية الخطية ، وتنص على التالي :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$: حيث : $d = (a, b)$ ، فإنه يوجد عددين : $x, y \in \mathbb{Z}$ يحققان المعادلة الخطية :

$$ax + by = d$$

عكس النظرية غير صحيح . أي قد يوجد عددين : $u, v \in \mathbb{Z}$ يحققان أن : $au + bv = g$ ، ومع ذلك :

$$\gcd(a, b) \neq g \text{ ، ويتحقق معكوس النظرية إذا كان : } d = 1 \text{ . أي : } ax + by = 1$$

مثال : إذا كان : $48x + 27y = 3$. أوجد : x, y .

فكرة حل مثل هذه المعادلة تأتي من متطابقة بيزوه ، ثم من خوارزمية القسمة ، ولكن بالسير بصورة عكسية كالتالي :

نتأكد أن : $\gcd(48, 27) = 3$. من خوارزمية القسمة :

$$48 = 27 \times 1 + 21$$

$$27 = 21 \times 1 + 6$$

$$21 = 6 \times 3 + \boxed{3}$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

إذاً متطابقة بيزوه متحققة لأن القاسم المشترك الأعظم للعددين : 48, 27 يساوي : 3 . الآن بعكس خوارزمية القسمة سنصل لقيم : x, y ، ونبدأ من الخطوة التي يظهر فيها القاسم . كالتالي :

$$3 = 21 - 6 \times 3$$

$$= 21 - (27 - 21) \times 3$$

$$= 21 - 3 \times 27 + 3 \times 21$$

$$= -3 \times 27 + 4 \times 21$$

$$= -3 \times 27 + 4 \times (48 - 27)$$

$$= -3 \times 27 + 4 \times 48 - 4 \times 27$$

$$= 4 \times 48 - 7 \times 27$$

وبما أن : $48x + 27y = 3$ ، و $48 \times 4 + 27 \times -7 = 3$ ، إذاً : $x = 4$ ، $y = -7$.

(8) الأعداد الأولية نسبياً : *Coprime numbers* أو *relatively prime numbers*

نقول عند عددين : a, b أنهما أوليان نسبياً إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي الواحد . أي : $\gcd(a, b) = 1$. مثال على ذلك : العددين : $8, 9$ أوليان نسبياً لأن : $\gcd(8, 9) = 1$. كذلك : $7, 12$ أوليان نسبياً لأن : $\gcd(7, 12) = 1$.

(9) خصائص الأعداد الأولية نسبياً :

لكل عدد : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، فإن :

$$(1) \text{ إذا كان : } \gcd(a, b) = 1 \text{ ، فإن : } \gcd(ab, a + b) = \gcd(ab, a - b) = 1 .$$

$$(2) \text{ إذا كان : } \gcd(a, a + 1) = 1 .$$

$$(3) \text{ إذا كان : } \gcd(a, b) = d \text{ ، فإن : } \gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 .$$

$$(4) \text{ إذا كان : } a, b \mid c \text{ ، وتحقق أن : } \gcd(a, b) = 1 \text{ ، فإن : } ab \mid c .$$

$$(5) \text{ إذا كان : } \gcd(a, b) = 1 \text{ ، فإن : } \text{lcm}[a, b] = ab \text{ لكل : } a, b > 0 .$$

كل هذه الخصائص قد تم برهان بعضها سابقاً ، والبعض الآخر سيأتي ضمن التطبيقات .

(10) متطابقة بيزوه ، و الأعداد الأولية نسبياً :

سابقاً درسنا نظرية بيزوه ، والتي تنص على أنه لكل : $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $ax + by = \gcd(a, b)$ ، وقلنا أن عكس النظرية لا يتحقق إلا إذا كان : $\gcd(a, b) = 1$. أي : $ax + by = 1$ ، ويمكن إثباته بسهولة نفرض أن : $\gcd(a, b) = d$. إذاً : $d \mid ax + by$ لأنها تقسم أي تركيب خطي كما ذكرنا سابقاً ، ولكن : $ax + by = 1$. إذاً : $d \mid 1$ ، وبالتالي : $d = 1$.

(11) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أثبت أن : $\gcd(a, b) = \gcd(a, b + a) = \gcd(a, b - a)$.

الحل :

نفرض أن : $(a, b) = d$ ، وهذا يعني أن : $d \mid a$ ، $d \mid b$ ، إذاً من خصائص القاسم سنجد أن : $d \mid a + b$ ، بقي أن نثبت أن : d هو القاسم المشترك الأعظم للعددين : $a, b + a$. نفرض أن : d_1 هو القاسم المشترك الأعظم للعددين : $a, b + a$. أي : $\gcd(a, b + a) = d_1$. إذاً : $d_1 > d$ ، وهذا يعني أن : $d_1 \mid a$ ، $d_1 \mid a + b$ ، ومن خصائص القاسم سنجد أن : $d_1 \mid a + b - a$ ، وبالتالي : $d_1 \mid b$ أي أن : $d_1 < d$ لأن القاسم المشترك الأعظم للعددين : a, b هو : d ، وهذا تناقض كون : $d_1 > d$ ، $d_1 < d$. إذاً : $d_1 = d$ ، وبالتالي : $(a, b) = (a, b + a)$. بنفس الفكرة يمكن أن نثبت أن : $(a, b) = (a, b - a)$.

(2) إذا كان القاسم المشترك الأعظم للعددين : a, b هو $\gcd(a, b) = 1$ أثبت أن القاسم المشترك الأعظم : $\gcd(a + b, a^2 - ab + b^2)$ إما : 1 أو 3 .

الحل :

نفرض أن : $d = \gcd(a + b, a^2 - ab + b^2)$ ، من خصائص القاسم يقسم أي مضاعف للعددين ، ويقسم أي تركيب خطي للعددين . إذاً : $d \mid (a + b)^2 - a^2 + ab - b^2 = 3ab$ ، وبالتالي : $d \mid 3ab$. أيضاً : $d \mid 3b(a + b) - 3ab$ ، وبالتالي : $d \mid 3b^2$. بالمثل نجد أن : $d \mid 3a^2$ ، وبما أن : $(a, b) = 1$. إذاً : $d \mid 3$ ، وبالتالي القيم الممكنة لـ d هي : 1 أو 3 .

(3) أثبت أن : $\gcd(30n + 2, 12n + 1) = 1$.

الحل :

في مثل هذه المسائل دوماً نفكر في خوارزمية القسمة أو الطرح المتكرر كالتالي :

$$30n + 2 = (12n + 1) \times 2 + 6n$$

$$12n + 1 = 6n \times 2 + 1$$

$$6n = 6n \times 1 + 0$$

$$\therefore \gcd = (30n + 2, 12n + 1) = (6n, 12n + 1) = (6n, 1) = 1$$

(4) ليكن : n عدد صحيح ، أثبت أن الكسر : $\frac{21n+4}{14n+3}$ لا يمكن تبسيطه .

الحل :

الكسر لا يمكن تبسيطه إذا كان القاسم المشترك الأعظم للعدين يساوي الواحد أو كان العدان أوليين نسبياً ، وهنا نستفيد من خوارزمية القسمة :

$$\begin{aligned} 21n+4 &= (14n+3) \times 1 + (7n+1) \\ 14n+3 &= (7n+1) \times 2 + 1 \\ 7n+1 &= (7n+1) \times 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \gcd(21n+4, 14n+3) = (14n+3, 7n+1) = (7n+1, 1) = 1$$

(5) ليكن : n عدداً صحيحاً ، أثبت أن : $11 \mid \gcd(n^3 + n^2 - 10n - 1, n^2 - 3n + 1)$.

الحل :

بإجراء القسمة المطولة سنجد أن :

$$\begin{aligned} \gcd(n^3 + n^2 - 10n - 1, n^2 - 3n + 1) &= \gcd(n^2 - 3n + 1, n - 5) \\ &= \gcd(n - 5, 11) = 11 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن : $\gcd(n^3 + n^2 - 10n - 1, n^2 - 3n + 1) = 11$ ، وكلاهما يحقق المطلوب .

لاحظ هنا أننا أجرينا القسمة المطولة حتى نستخرج : q, r فنستطيع تطبيق خوارزمية القسمة . وبالتالي استنتاج القاسم عن طريق خوارزمية القسمة .

(6) إذا كان : $\gcd(a, b) = 1$ أثبت أن : $\gcd(a+b, a-b)$ إما : 1 أو 2 .

الحل :

نفرض أن : $\gcd(a+b, a-b) = d$. الآن : بما أن القاسم لعدين يقسم حاصل جمعهما ، وحاصل طرحهما إذاً : يجمع العددين نحصل على : $2a$ ، وبطرح العددين نحصل على : $2b$. إذاً : $d \mid 2a, d \mid 2b$. إذا كانت : $d \nmid 2$ ، فإن : $d \mid a, d \mid b$ ، وبالتالي : $\gcd(a, b) = d$. وهذا يعارض كون : $d \nmid 2$. إذاً : $d \mid 2$ ، وبالتالي القيم الممكنة لـ d إما : 1 أو 2 .

(7) أوجد الحلول الصحيحة الموجبة التي تحقق المعادلة : $x^2 - y^2 = 17$.

الحل :

بتحليل الطرف الأيسر كفرق بين مربعين سنجد أن : $(x - y)(x + y) = 17$. العدد : 17 عدد أولي هذا يعني أن : $(x - y)(x + y) = 1 \times 17$. إذاً : $x - y = 1$ ، و $x + y = 17$ بحل نظام المعادلتين سنجد أن : $x = 9$, $y = 8$.

(8) إذا كان للمعادلة : $x^2 + ax + b$ جذور صحيحة . أثبت أن هذه الجذور تقسم : b .

الحل :

نفرض أن جذور المعادلة هي : x_1, x_2 . إذاً فالمعادلة تساوي :

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

إذاً : $b = x_1 \cdot x_2$ ، وبما أن : $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. إذاً : x_1, x_2 من عوامل : b ، وبالتالي قاسمة لـ b .

(9) إذا كان : $\gcd(n, 6) = 1$. أثبت أن : $24 \mid n^2 - 1$.

الحل :

عند قسمة أي عدد على : 6 ، فإن البواقي : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ، وبما أن : $\gcd(n, 6) = 1$ ، فإن البواقي المحتملة هي : 1, 5 لأن البواقي الأخرى تحمل أخذ عامل مشترك ، وبالتالي يعارض كون القاسم بين : $n, 6$ هو الواحد . إذاً يمكن كتابة : n على الصورة : $n = 6k \pm 1$ لاحظ أن : $n = 6k - 1$ هي نفسها : $n = 6k + 5$ لو طرحنا منها : 6 ، فتذكر .

الآن : بالتعويض عن قيمة : $n = 6k \pm 1$ في المقدار : $n^2 - 1$. سنجد أن :

$$n^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 12k(3k \pm 1)$$

الآن : أحد العددين : $3k \pm 1$ ، k زوجي ، والآخر فردي ، وبالتالي ، فإن : $24 \mid n^2 - 1$. لأن العدد الزوجي سيكون من عوامله : 2 عند ضربه في : 12 سنحصل على : 24 .

(10) إذا كان : $13 \mid a + 4b$. أثبت أن : $13 \mid 10a + b$.

الحل :

لعلنا نتذكر الخاصية التي أثبتناها من خواص القاسم والتي تنص على أنه : إذا قسم عدد أحد عددين ، وحاصل جمعهما فهو يقسم الآخر .

لاحظ أن : $10(a + 4b) - (10a + b) = 39b$. ولكن : $13 \mid 10(a + 4b)$ لأن : $13 \mid a + 4b$

كذلك : $13 \mid [10(a + 4b) - (10a + b)] = 39b$. إذاً : $13 \mid 10a + b$.

(11) إذا كان : $(a, b) = (a, c) = 1$. أثبت أن : $(a, bc) = 1$.

الحل :

لعلنا سوف نستفيد من متطابقة بيزوه كالتالي :

نفرض وجود أعداد : $x, y, z, k \in \mathbb{Z}$ تحقق أن : $ax + by = 1$, $az + ck = 1$. بضرب المعادلتين سنجد

أن : $(ax + by)(az + ck) = 1$. الآن بضرب القوسين ، وإعادة الترتيب :

$$\begin{aligned} 1 &= (ax + by)(az + ck) \\ &= a^2xz + acxk + abyz + bcyk \\ &= a(xz + cxk + byz) + bc(yk) \end{aligned}$$

وبما أن المعادلة متحققة هذا يعني أن : $(a, bc) = 1$ ، وذلك بعكس متطابقة بيزوه .

(12) أوجد كل الحلول الصحيحة للمعادلة : $x + y = xy$.

الحل :

بما أن القيم صحيح ، فدوماً نفكر في التحليل لعوامل :

$$x + y = xy \Rightarrow x + y - xy = 0 \Rightarrow (x - 1)(1 - y) = -1$$

الآن : إما $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$, $y = 0$ أو $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$, $y = 2$.

إذاً الأزواج المرتبة المحققة للمعادلة هي : $(0, 0)$, $(2, 2)$.

(13) إذا كان : $\gcd(5, n) = 1$. أثبت أن : $125 \mid n^{100} - 1$.

الحل :

بما أن : $\gcd(5, n) = 1$ هذا يعني أن : $5 \nmid n$ ، وبالتالي يمكن كتابة : n على الصورة : $n = 5k \pm 1$ أو على الصورة : $n = 5k \pm 2$. لأن البواقي المحتملة لا تخرج عن المجموعة : $1, 2, 3, 4$.
الآن : نأخذ الحالة الأولى ، وهي إذا كانت : $n = 5k \pm 1$. بالتعويض عن قيمة : n مع تذكر مفكوك ذات الحدين سنجد أن :

$$\begin{aligned} (5k \pm 1)^{100} - 1 &= \left[(5k)^{100} \pm 100 \times (5k)^{99} \pm \dots \pm 100 \times (5k)^1 + 1 \right] - 1 \\ &= (5k)^{100} \pm 100 \times (5k)^{99} \pm \dots \pm 100 \times (5k)^1 \end{aligned}$$

الآن واضح أنه بسهولة يمكننا أخذ : 125 كعامل مشترك بين كل الحدود فيصبح المقدار على الصورة :

$$\begin{aligned} (5k \pm 1)^{100} - 1 &= \left[(5k)^{100} \pm 100 \times (5k)^{99} \pm \dots \pm 100 \times (5k)^1 + 1 \right] - 1 \\ &= (5k)^{100} \pm 100 \times (5k)^{99} \pm \dots \pm 100 \times (5k)^1 \\ &= 125m \end{aligned}$$

إذاً : $125 \mid n^{100} - 1$ ، والجزء الثاني نتركه للنقاش في المحاضرة .

(14) أثبت أن : $\gcd(n, n+1) = 1$. حيث : $n \in \mathbb{Z}$.

الحل :

يمكن إثباتها بأكثر من طريقة :

باستخدام الطرح المتكرر : $\gcd(n, n+1) = \gcd(n, n+1-n) = \gcd(n, 1) = 1$.

ويمكن بطريقة جبرية ، وذلك بأن نثبت أن هذا الكسر : $\frac{n+1}{n}$ لا يمكن تبسيطه إلا إذا كان : $n = \pm 1$ كالتالي

: $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. وبما أن : n عدد صحيح . إذاً لن يكون المقدار عدداً صحيحاً إلا إذا كان : $n = \pm 1$ ، وبالتالي : $\gcd(n, n+1) = 1$.

باستخدام خوارزمية القسمة : $\gcd(n, n+1) = 1 \Rightarrow n+1 = n \times 1 + 1$ ، $n = 1 \times n + 0$.

فائدة : ممكن من هذا السؤال الصغير أن نستنتج علاقة جميلة جداً ، وهي أن أي عددين متتاليين هما أوليان نسبياً فيما بينهما .

(12) مسائل إضافية على الدرس :

- (1) أوجد : $\gcd(123456789, 987654321)$, $\gcd(2261, 1275)$, $\gcd(588, 44)$.
- (2) أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين : 90 , 252 ، ثم أوجد : x, y بحيث تحقق المعادلة الديوفنتية الخطية : $d = 252x + 90y$.
- (3) باستخدام التحليل إلى عوامل أوجد القاسم المشترك الأعظم لكل من :
 - (a) 36 , 45
 - (b) 522 , 87
 - (c) 1024 , 118098
- (4) افرض : $a, b, k \in \mathbb{Z}$. تحقق : $k \mid b$, $k \mid a$ أثبت أن : $k \mid \gcd(a, b)$.
- (5) لكل : $k \in \mathbb{Z}^+$. أثبت أن : $\gcd(6k + 5, 7k + 6) = 1$.
- (6) إذا كان : $\gcd(a, b) = 1$ ، وكان : $c \mid (a + b)$. أثبت أن : $\gcd(a, b) = \gcd(a, c) = 1$.
- (7) أوجد كل القيم ل : $n \in \mathbb{Z}^+$ ، و التي تحقق أن : 7 تقسم العددين : $2^n + 1$, $2^n - 1$.
- (8) إذا كان : $c \mid a$, $c \mid b$. أثبت أن : $c \mid \gcd(a, b)$.
- (9) أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين : $3^{15} + 1$ ، و 271 .
- (10) لكل : $a_1, a_2, \dots, a_n, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ حيث : $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$. أثبت أن :

$$d \mid (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n)$$
- (11) إذا كان : $k = abc + 1$. أثبت أن : $\gcd(k, a) = \gcd(k, b) = \gcd(k, c) = 1$.
- (12) إذا كان : $d \mid a$, $d \mid b$. أثبت أن : $d^2 \mid ab$.
- (13) إذا كان : $c \mid ab$ ، و $\gcd(c, a) = d$. أثبت أن : $c \mid db$.
- (14) أوجد كل الأعداد الأولية : p, q التي تحقق المعادلة : $p^2 - 2q = 1$.
- (15) إذا كان للمعادلة : $x^2 + ax + b$ جذور نسبية . أثبت أن هذه الجذور أعداد صحيحة .
- (16) إذا كان : $p, q > 3$. أعداد أولية . أثبت أن : $24 \mid p^2 - q^2$.
- (17) إذا كان : $m \in \mathbb{Z}^+$ ، و $a, b \in \mathbb{Z}$. أثبت أن : $\gcd(ma, mb) = m \gcd(a, b)$. حيث :

$$\gcd\left(\frac{a}{\gcd(a, b)}, \frac{b}{\gcd(a, b)}\right) = 1$$

المحاضرة الرابعة

المضاعف المشترك الأصغر

The least common multiple

(1) المضاعف المشترك الأصغر : *least common multiple*

لو أمعنا النظر في مضاعفات العدد : 6 ، وهي : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 56, كذلك في مضاعفات العدد : 8 ، وهي : 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, لوجدنا أن مضاعفات العددين تشتركان في العدد : 24 ، والعدد : 48 . نسمي أصغر العددين بين مضاعفات : 6 ، و 8 بالمضاعف المشترك الأصغر .

تعريف :

ليكن : $a, b \in \mathbb{Z}$ أعداد غير صفرية . نقول إن : $m \in \mathbb{Z}^+$ مضاعف مشترك أصغر للعددين : a, b ، ونكتب : $m = [a, b]$ ، أو $m = lcm[a, b]$ ، أو $m = lcm(a, b)$ إذا ، وإذا فقط :

(1) $a \mid m$ ، $b \mid m$. تعني أن كلا العددين يقسمان : m .

(2) إذا كان : $a \mid c$ ، $b \mid c$ ، فإن : $m \leq c$. تعني إذا وجد أي مضاعف آخر للعددين ، فإنه أكبر من : المضاعف المشترك الأصغر .

(2) المضاعف المشترك الأصغر لأكثر من عددين :

لو أردنا إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : 4, 5, 10 ، فإن مضاعفات كل عدد على الصورة :

$$4, 8, 12, 16, \boxed{20}, 24, \dots , \boxed{5}, 10, 15, \boxed{20}, 25, \dots , \boxed{10}, \boxed{20}, 30, \dots$$

سنلاحظ أن الأعداد كلها تشترك في : 20 . إذاً هو المضاعف المشترك الأصغر لهما ، ومعنى هذا أن تعريف المضاعف المشترك لعددين يمتد لأكثر من عددين .

تعريف المضاعف المشترك الأصغر لمجموعة أعداد :

ليكن : $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ أعداد غير صفرية . نقول إن : $m \in \mathbb{Z}^+$ مضاعف مشترك أصغر للأعداد : a_1, a_2, \dots, a_n ، ونكتب : $m = lcm[a_1, a_2, \dots, a_n]$. إذا ، وإذا فقط :

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n \mid m . \text{ تعني أن كل الأعداد تنقسم : } m .$$

(2) إذا كان : $a_1, a_2, \dots, a_n \mid c$ ، فإن : $m \leq c$. تعني إذا وجد أي مضاعف آخر للأعداد ، فإنه أكبر من : المضاعف المشترك الأصغر لها جميعاً .

مثال :

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 هو : 24 لأن كل الأعداد تنقسم : 24 ، و لا يوجد عدد آخر أصغر من : 24 يحقق أن الأعداد جميعها تنقسمه .

(3) خصائص المضاعف المشترك الأصغر :

إذا كان : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، فإن الخواص التالية متحققة :

$$(1) \quad \text{إذا كان : } lcm[a, b] = m \text{ ، حيث : } m = aa' = bb' \text{ ، فإن : } gcd(a', b') = 1 .$$

$$(2) \quad \text{إذا كان : } lcm[a, b] = m \text{ ، و } m' \text{ مضاعف آخر للعددين ، بحيث : } m' = aa' = bb' \text{ ، وكان : } gcd(a', b') = 1 \text{ ، فإن : } m = m' .$$

$$(3) \quad \text{إذا كان : } a \mid c , b \mid c \text{ ، فإن : } lcm[a, b] \mid c .$$

$$(4) \quad \text{إذا كان : } a \mid b \text{ ، فإن : } lcm[a, b] = b .$$

$$(5) \quad \text{إذا كان : } a \mid c , b \mid c \text{ ، فإن : } lcm[a, b] \mid c .$$

$$(6) \quad lcm[a, b, c] = lcm[[a, b], [b, c]] .$$

$$(7) \quad \text{لكل : } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ ، فإن : } [ka, kb] = k \cdot [a, b] .$$

$$(8) \quad \text{إذا كان : } a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ ، } b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} \text{ ، فإن : } lcm[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)} .$$

وسياتي مزيد توضيح لاستنتاج المضاعف عن طريق التحليل إلى عوامل في الفقرة القادمة .

إثبات بعض الخواص :

(1) نفرض أن : $\gcd(a', b') = d$. حيث : $a' = a''d$, $b' = b''d$ ، ولكن : $m = aa' = bb'$ ،
 بالتعويض عن قيمة : a', b' : سنجد أن : $m = aa''d = bb''d$ ، وبالتالي : $\frac{m}{d} = aa'' = bb''$ ، ولكن
 : $\frac{m}{d} < m$ أي أنه يوجد مضاعف آخر لـ a, b أصغر من : m ، وهذا يناقض أن : m هو المضاعف
 المشترك الأصغر . إذاً : $\gcd(a', b') = 1$.

(2) وهي عكس الخاصية الثانية ، ويمكن إثباتها بنفس الفكرة .

(3) سيتم إثباتها لاحقاً إن شاء الله ضمن التطبيقات .

(4) من التعريف : $a | b$, $b | b$. إذاً : b مضاعف للعددين : a, b . إذا وجد مضاعف آخر للعددين ،
 وليكن : m . فإن : $b \leq m$ لأن $b | m$.

سنترك إثبات بقية الخواص كتمرين للمناقشة أثناء المحاضرة ، وبعضها ستذكر في التطبيقات ، ويمكن إثباتها بالاستفادة
 من التعريف .

(4) العلاقة بين القاسم المشترك الأعظم ، والمضاعف المشترك الأصغر :

لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، فإن العلاقة التالية متحقق : $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}[a, b] = a \cdot b$.

الإثبات :

للتسهيل نفرض أن : $\gcd(a, b) = d$, $\text{lcm}[a, b] = m$. أصبح المطلوب إثبات أن : $d \cdot m = a \cdot b$.

الآن : من تحليل العددين : a, b لعواملهما الأولية نعلم أن : $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$.

بضرب العددين : $a \cdot b = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots p_k^{\alpha_k + \beta_k}$.

ولكن : $\gcd(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$ ، $\text{lcm}[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$. إذاً :

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \cdot \text{lcm}[a, b] &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)} \cdot p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)} \\ &= p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k) + \max(\alpha_k, \beta_k)} \\ &= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots p_k^{\alpha_k + \beta_k} \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

لاحظ أن العددين : α_k, β_k أحدهما الأصغر ، والآخر الأكبر .

(5) المضاعف المشترك الأصغر للعددين الأولين أو الأولين نسبياً :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، بحيث : $\gcd(a, b) = 1$ ، فإن : $\text{lcm}[a, b] = a.b$.
وهذه يمكن إثباتها من العلاقة السابقة بصورة مباشرة .

(6) إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين عن طريق التحليل إلى عوامل :

المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو حاصل ضرب جميع العوامل الأولية غير المشتركة للعددين ،
والمشتركة ذات الأس الأكبر .

(1) أوجد : $\text{lcm}[220, 140]$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 220 \\ 2 & 110 \\ 5 & 55 \\ 11 & 11 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 220 = 2^2 \times 5 \times 11 \quad , \quad \begin{array}{r|l} 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأكبر هي : $2^2 \times 5 = 20$.

إذاً : $\text{lcm}[220, 140] = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 1540$ ، ويمكن أن نوجده بمعلومية العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر ، والمضاعف المشترك الأصغر لعددين كالتالي :

نعلم أن : $\gcd(220, 140) = 20$. أوجدناه في صفحة : (30) . بما أن : $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}[a, b] = a.b$ إذاً :

$$\begin{aligned} \gcd(220, 140) \cdot \text{lcm}[220, 140] &= 220 \times 140 \\ \Rightarrow \text{lcm}[220, 140] &= \frac{220 \times 140}{\gcd(220, 140)} \\ \Rightarrow \text{lcm}[220, 140] &= \frac{220 \times 140}{20} \\ \Rightarrow \text{lcm}[220, 140] &= 220 \times 7 \\ \Rightarrow \text{lcm}[220, 140] &= 1540 \end{aligned}$$

لاحظ أصبحت لدينا طريقتين لاستنتاج المضاعف المشترك الأصغر لعددين . إما بالتحليل ، أو بالعلاقة بين القاسم ، والمضاعف للعددين .

(2) أوجد : $lcm(1638, 2835)$. بتحليل كل عدد سنجد أن :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1638 \\ 3 & 819 \\ 3 & 273 \\ 7 & 91 \\ 13 & 13 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 1638 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \quad , \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2835 \\ 3 & 945 \\ 3 & 315 \\ 3 & 105 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 2835 = 3^4 \times 5 \times 7$$

لاحظ أن العوامل الأولية المشتركة ذات الأس الأكبر هي : $3^4 \times 7 = 63$.

إذاً : $lcm(1638, 2835) = 2 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 13 = 73710$.

طريقة أخرى :

أوجدنا سابقاً : $gcd(1638, 2835) = 63$. إذاً :

$$\begin{aligned} gcd(1638, 2835) \cdot lcm[1638, 2835] &= 1638 \times 2835 \\ \Rightarrow lcm[1638, 2835] &= \frac{1638 \times 2835}{gcd(1638, 2835)} \\ \Rightarrow lcm[1638, 2835] &= \frac{1638 \times 2835}{63} \\ \Rightarrow lcm[1638, 2835] &= 1638 \times 45 \\ \Rightarrow lcm[1638, 2835] &= 73710 \end{aligned}$$

(3) أوجد : $lcm(11, 8, 5)$.

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة أولية نسبياً فيما بينها . إذاً : $lcm(11, 8, 5) = 11 \times 8 \times 5 = 440$.

(4) أوجد : $lcm(6, 10, 12)$. بالاستفادة من الخواص : (4) , (6) :

$$\begin{aligned} lcm[6, 10, 12] &= lcm[[6, 10], [10, 12]] \\ &= lcm\left[\frac{6 \times 10}{2}, \frac{10 \times 12}{2}\right] \\ &= lcm[30, 60] = 60 \end{aligned}$$

(7) مسائل محلولة على الدرس :

(1) إذا كان : $\gcd(a, b) + \text{lcm}(a, b) = a + b$. أثبت أن العددين قاسم للآخر .

الحل :

نفرض أن : $\gcd(a, b) = d$, $\text{lcm}(a, b) = m$. يصبح المعطى على الصورة : $d + m = a + b$.

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف نعيد كتابة العلاقة : $d + \frac{a \cdot b}{d} = a + b$. بالتوحيد ، وضرب الطرفين :

$$\begin{aligned} d^2 + a \cdot b &= ad + bd \\ \Rightarrow ad + bd - ab - d^2 &= 0 \\ \Rightarrow (a - d)(d - b) &= 0 \end{aligned}$$

الآن : إما : $d = a$ ، أو : $d = b$ ، وهذا يعني أن أحد العددين قاسم للآخر .

(2) إذا كان : $a \mid c$, $b \mid c$ ، فإن : $\text{lcm}[a, b] \mid c$.

الحل :

بما أن : $a \mid c$, $b \mid c$. إذاً : $c = ax = by$ ، لكل : $x, y \in \mathbb{Z}$ ، وإذا كان : $\gcd(a, b) = d$ ، من متطابقة بيزوه يوجد عددين : $u, v \in \mathbb{Z}$ يحققان أن : $d = au + bv$. الآن : من العلاقة بين القاسم ،

والمضاعف : $\text{lcm}[a, b] = \frac{ab}{d}$. الآن : نريد أن نثبت أن : $\frac{c}{\text{lcm}[a, b]}$ عدد صحيح .

$$\frac{c}{\text{lcm}[a, b]} = \frac{c}{\frac{ab}{d}} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(au + bv)}{ab} = \frac{c}{b}u + \frac{c}{a}v = yu + xv \in \mathbb{Z}$$

(3) أوجد أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على الأعداد : $1, 2, \dots, 11$.

الحل :

العدد هو المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد . أي المطلوب : $\text{lcm}(1, 2, \dots, 10, 11) = m$. الآن : إذا كان العدد يقبل القسمة على : 8 ، فهو تلقائياً سيقبل القسمة على : 2, 4 ، وإذا قبل القسمة على : 9 ، فهو سيقبل القسمة على : 3, 6 ، وإذا قبل القسمة على : 5 ، فهو سيقبل القسمة على : 10 . إذاً من عوامل العدد : 5, 8, 9 ، سيبقى العددين : 7, 11 . إذاً أصغر عدد مطلوب : $5 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 = 27720$.

إذاً : $\text{lcm}(1, 2, \dots, 10, 11) = 27720$.

(4) أوجد عددين : x, y . بحيث : $xy = 10584$, $lcm[x, y] = 252$.

الحل :

يوجد عددين : $a, b \in \mathbb{Z}^+$ يحققان : $ax = by = 252$. بحيث : $\gcd(a, b) = 1$. الآن :

$$a \cdot b = \frac{lcm[a, b]}{x} \cdot \frac{lcm[a, b]}{y} = \frac{252^2}{xy} = \frac{63504}{10584} = 6$$

بما أن : $a, b \in \mathbb{Z}^+$. إذاً لدينا الاحتمالات التالية : $a \cdot b = 1 \times 6$, $a \cdot b = 2 \times 3$. الآن :

$$\text{إذا : } a = 1, b = 6 \text{ : إذاً : } a = \frac{252}{x} = 1 \Rightarrow x = 252, b = \frac{252}{y} = 6 \Rightarrow y = 42$$

$$\text{وإذا كان : } a = 2, b = 3 \text{ ، فإن : } a = \frac{252}{x} = 2 \Rightarrow x = 126, b = \frac{252}{y} = 3 \Rightarrow y = 84$$

إذاً القيم الممكنة لـ x, y كثنائيات مرتبة : $(252, 42), (42, 252), (126, 84), (84, 126)$.

(5) إذا كان : $\gcd(x, y) = 30$, $lcm[x, y] = 1680$. حيث : $x = 240$. أوجد : y .

الحل :

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف نعلم أن : $\gcd(xy) \cdot lcm[x, y] = x \cdot y$: إذاً :

$$y = \frac{\gcd(xy) \cdot lcm[x, y]}{x} = \frac{30 \times 1680}{240} = 210$$

(6) تحقق مع التعليل : $\gcd(a, b, c) \cdot lcm[a, b, c] = abc$.

الحل :

ليس من الضرورة أن : $\gcd(a, b, c) \cdot lcm[a, b, c] = abc$ ، ويمكن إثباته بإعطاء مثال معاكس :

بوضع : $a = 2, b = 4, c = 8$. سنجد أن : $\gcd(2, 4, 8) = 2$ ، و $lcm[2, 4, 8] = 8$ ، وبالتالي

سنجد أن : $\gcd(2, 4, 8) \cdot lcm[2, 4, 8] = 8 \times 2 = 16$. بينما : $abc = 2 \times 4 \times 8 = 64$ ، وبالتالي

الطرفان غير متساويين .

إذاً هذه العلاقة لا تتحقق إلا لعددين فقط .

(7) أوجد كل الأعداد الصحيحة : $a \geq b$ ، والتي تحقق : $lcm[a, b] = 100$ ، $gcd(a, b) = 10$.

الحل :

من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف سنجد أن : $gcd(a, b) \cdot lcm[a, b] = ab \Rightarrow ab = 1000 = 10^3$

الآن : لاحظ أن : $a, b \in [10, 100]$. العددين : 10, 100 يحققان المطلوب . هل توجد أعداد أخرى ؟

لكي يكون : 10 قاسم لعدد يجب أن يكون آحاده صفراً ، والأعداد التي آحادها صفراً في الفترة : $[10, 100]$ ستكون هي المضاعف المشترك الأكبر ، وهذا يخالف المعطى ، وبالتالي لا يوجد عددين يحققان سوى : 10, 100 .

(8) أوجد المضاعف المشترك الأصغر لـ : $6x^2 - 24$ ، $3x^3 + 6x^2$.

الحل :

بتحليل العدد الأول : $3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x + 2)$.

بتحليل العدد الثاني : $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 2 \times 3 \times (x - 2)(x + 2)$.

بتطبيق التعريف :

$$lcm[6x^2 - 24, 3x^3 + 6x^2] = 2 \times 3 \times x^2(x - 2)(x + 2) = 6x^4 - 24x^2$$

(9) قارن بين العددين : $\frac{31^{16}}{17}$ ، $\frac{17^{30}}{31}$.

الحل :

بما أن : $gcd(17, 31) = 1$ لأنهما أوليان . إذاً : $lcm[17, 31] = 17 \times 31 = 527$. بتوحيد المقامات ، وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين سنجد أن :

$$\frac{31^{16}}{17} = \frac{31^{16} \times 31}{17 \times 31} = \frac{31^{17}}{527} , \quad \frac{17^{30}}{31} = \frac{17^{30} \times 17}{31 \times 17} = \frac{17^{31}}{527}$$

الآن سنقارن بين : $\frac{31^{17}}{527}$ ، $\frac{17^{31}}{527}$ ، وبصورة أدق بين : 31^{17} ، 17^{31} :

$$17^{31} > 16^{31} = (2^4)^{31} = 2^{124} > 2^{85} = (2^5)^{17} = 32^{17} > 31^{17}$$

$$\therefore \frac{31^{16}}{17} < \frac{17^{30}}{31} \text{ : إذاً .}$$

- (10) أوجد أصغر عدد بحيث إذا قُسم على : 2 يعطي الباقي : 0 ، وإذا قُسم على : 4 لكان الباقي : 2 ، وإذا قسم على : 5 لكان الباقي : 3 ، وإذا قسم على : 6 لكان الباقي : 4 .

الحل :

مثل هذه المسائل نفكر دوماً في المضاعف المشترك الأصغر أولاً لهذه الأعداد : $lcm[2,3,4,5,6] = 60$.

لاحظ أن الفرق بين المقسوم عليه ، وباقي القسمة دوماً يساوي : 2 . إذاً : العدد الذي يحقق المطلوب : 58 .

- (11) غادرت أربع سفن محملة ببضائع الميناء يوم : 2 يناير : 2011 . السفينة الأولى تعود إلى هذا الميناء كل أربع أسابيع ، و السفينة الثانية تعود إلى هذا الميناء كل ثمانية أسابيع ، و السفينة الثالثة تعود إلى هذا الميناء كل اثني عشر أسبوعاً ، و السفينة الرابعة تعود إلى هذا الميناء كل ستة عشر أسبوعاً . في أي أسبوع ستلتقي جميع السفن منذ مغادرتها الميناء ؟ . هل تستطيع أن تحدد التاريخ ؟

الحل :

لوكتبنا مضاعفات الفترة التي تعود فيها كل سفينة سنلاحظ :

السفينة الأولى : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...

السفينة الثانية : 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...

السفينة الثالثة : 12, 24, 36, 40, 48, 60, ...

السفينة الرابعة : 16, 32, 48, 64, ...

لاحظ أن السفن كلها ستكون موجودة في الميناء بعد : 48 أسبوعاً ، وهو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد ، وستترك تحديده بصورة جبرية للنقاش أثناء المحاضرة . كذلك سنترك تحديد التاريخ كنشاط !

- (12) ماهو العدد الذي إذا قُسم على الأعداد : 3, 4, 5 لكان الباقي : 1 .

الحل :

نفس الفكرة . المضاعف المشترك للأعداد : $lcm[3,4,5] = 60$ ، ولكي يكون الباقي : 1 يكفي أن نضيف الباقي للمضاعف ، وبالتالي سيكون العدد المطلوب : 61 .

(13) عدد من ثلاث خانات إذا طُرح منه 7 : لكان الناتج يقبل القسمة على 7 ، وإذا طُرح منه 8 : لكان الناتج يقبل القسمة على 8 ، وإذا طُرح منه 9 : لكان الناتج يقبل القسمة على 9 ، فما هو العدد .

الحل :

لكي يقبل العدد القسمة على الأعداد الثلاثة حتى بعد الطرح ، فيجب أن يكون مضاعفاً مشتركاً لهذه الأعداد الثلاثة . إذاً فالتوجد المضاعف المشترك لهذه الأعداد : $lcm[7,8,9] = 504$. لاحظ أن الأعداد أولية نسبياً فيما بينها . العدد : 504 مضاعف لجميع الأعداد ، فإذا طرحنا منه أيٍّ منها سيبقى مضاعفاً لها ، وبالتالي سيقبل القسمة على أيٍّ منها .

(14) لأي عددين : $a, b \in \mathbb{Z}^+$. أثبت أن : $\gcd(a, b) = \gcd(a + b, lcm[a, b])$

الحل :

نفرض أن :

$$\gcd(a, b) = d , \quad \gcd(a + b, lcm[a, b]) = d' , \quad lcm[a, b] = m , \quad a = da' , \quad b = db'$$

الآن : $d \mid a , d \mid b$ ، هذا يقتضي أن : $d \mid a + b$ من خواص القاسم ، و $d \mid m$ لأن : $a, b \mid m$ من خواص المضاعف . إذاً : $d \mid d' \dots (1)$.

الآن : $d' \mid d \cdot a' b'$ من العلاقة بين القاسم ، والمضاعف ، ولكن : $(a', b') = 1$. إذاً كان : $d' \mid d, a', b'$ فقد انتهى الإثبات . نفرض أن : $d' \nmid d$. إذاً : $d' \mid a' b'$ ، وبالتالي : $d' = a' b'$.

الآن : $a + b = d(a' + b')$ ، وبالتالي : $a' b' \mid a' + b'$ ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $a' = b' = 1$ لأن : $(a', b') = 1$. إذاً : $d' \mid d \dots (2)$. إذاً من : $(1), (2)$ سنجد أن : $d = d'$.

(8) مسائل إضافية على الدرس :

- (1) أوجد : $lcm[588, 44]$, $lcm[2261, 1275]$.
- (2) باستخدام التحليل إلى عوامل أوجد المضاعف المشترك الأصغر لكل من :
 (a) 36 , 45 (b) 522 , 87 (c) 1024 , 118098
- (3) عدد الأعداد المربعة الكاملة ، والتي أكبر من : 1 ، وأصغر من : 1432 ، وتقبل القسمة على : 2,5 .
- (4) أوجد باقي قسمة العدد : $23^{2011} + 25$. على : $lcm[8, 12]$.
- (5) أوجد باقي قسمة العدد : 12345678901234567890 . على : 9 .
- (6) ماهو أصغر قاسم أولي للعدد : $5^{2011} + 7^{1432}$.
- (7) إذا كان : $gcd(8, n) = 4$, $lcm[8, n] = 24$. أوجد : n .
- (9) ماهو أصغر عدد صحيح يقبل القسمة على أول خمسة أعداد مؤلفة موجبة .
- (10) ماهو أصغر عدد صحيح إذا قُسم على أي من الأعداد من : 2 إلى : 9 كان الباقي : 1 .
- (11) أوجد كل الأعداد الفردية : $a, b \in \mathbb{Z}^+$. التي تحقق : $gcd(a, b) + b = lcm[a, b] + a = 8$.
- (12) إذا كان : $12! = 47a001600$. أوجد : a . حيث : $n!$ تعني مضروب : n .
- (13) أوجد كل العوامل الأولية للعدد : 1000027 .
- (14) إذا كان : $gcd(a, b) = d$, $lcm[a, b] = m$. أثبت أن : $d \mid m$.
- (15) لأي عدد صحيح : k . أثبت أن : $lcm[9n + 8, 6n + 5] = 45n^2 + 93n + 40$.
- (16) إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}^+$. تُحقَّق : $a + b = 5432$ ، و $lcm[a, b] = 223020$. أوجد : a, b .

الماضرة الخامسة

التطابقات

Congruences

التطابقات هو تعبير آخر لمفهوم قابلية القسمة قُدم من قبل العالم الألماني يوهان كارل فريدريش غاوس *Johann Carl Friedrich Gauss* بطريقة جعلته أداة فعالة لتسهيل البراهين ووسيلة أخرى لدراسة نظرية الأعداد .

(1) مفهوم التطابقات :

إذا كان : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $n \in \mathbb{Z}^*$ ، فيقال عن a أنه يطابق ، أو يوافق *Congruences* b قياس n ، ونكتب : $a \equiv b \pmod{n}$. إذا كان : $n \mid a - b$.

وإذا كان : a لا يطابق ، أو يوافق *Congruences* b قياس n ، فيكتب : $a \not\equiv b \pmod{n}$.

فمثلاً :

$29 \equiv 1 \pmod{2}$: تعني أن باقي قسمة : 29 على : 2 تساوي : 1 ، أو أن : $29 - 1 \mid 2$ أو أن : 29,1 لهما نفس الباقي عند قسمتهما على : 2 .

لاحظ كما قلنا سابقاً التطابقات هي صورة أخرى لقابلية القسمة فيمكن كتابة التطابق : $29 \equiv 1 \pmod{2}$ باستخدام خوارزمية القسمة على الصورة : $29 = 2 \times 14 + 1$.

أمثلة أخرى :

$$16^{1431} \equiv 6 \pmod{10} , \quad 3^{2010} \equiv 1 \pmod{2} , \quad 16 \equiv 0 \pmod{8}$$

بينما :

$$16^{1431} \not\equiv 6 \pmod{2} , \quad 3^{2010} \not\equiv 1 \pmod{10} , \quad 16 \not\equiv 0 \pmod{5} , \quad 31 \not\equiv 1 \pmod{4}$$

$$31 \not\equiv 1 \pmod{4} : \text{وتعني أن } 31 - 1 = 30 \not\mid 4 .$$

(2) خصائص التطابقات :

- (1) لكل عدد : $a \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $a \equiv a \pmod{m}$. تحقق خاصية الانعكاس . *reflexive* .
- (2) لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$ ، إذا : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن : $b \equiv a \pmod{m}$ تحقق خاصية التماثل . *Symmetric* .
- (3) لكل : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ، إذا : $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{m}$ ، فإن : $a \equiv c \pmod{m}$ تحقق خاصية التبعدي . *Transitive* .

- (4) لكل : $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. إذا : $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \equiv d \pmod{m}$ ، فإن :
- $$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m} \text{ و } a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$
- وبصورة عامة إذا كان : $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$ ، $k \in \mathbb{N}$ ، بحيث : $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ ، و $1 \leq i \leq k$ ، فإن :

- $$a_1 + a_2 + \dots + a_k \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_k \pmod{m}$$
- $$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \equiv b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k \pmod{m}$$
- (6) لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{Z} \geq 0$. إذا : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن : $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
- (7) لكل : $a, b, c \in \mathbb{Z}$ بحيث : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن : $ac \equiv bc \pmod{m}$.

إثبات بعض الخواص :

- (1) بما أن : $a \equiv a \pmod{m}$ تكافئ أن : $m \mid a - a = 0$ ، وهذا متحقق .
- (2) بما أن : $a \equiv b \pmod{m}$ هذا يكافئ أن : $m \mid a - b$ إذاً يوجد عدد يحقق أن : $a - b = km$ بالضرب في : -1 سنجد أن : $b - a = (-k)m$ ، وبالتالي : $m \mid b - a$ لأن كل الأعداد صحيحة ، وبالتالي : $b \equiv a \pmod{m}$.

سنترك البقية كتطبيق للطلاب في المحاضرة . ويمكن إثباتها من تحويل التطابق لخوارزمية القسمة .

(3) خصائص إضافية مع إثباتها :

(1) لكل : $m \in \mathbb{Z}^+$ أثبت أنه إذا كان : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن باقي قسمة : a على : m يساوي باقي قسمة : b على : m .

الإثبات :

نفرض أن : $a = mq_1 + r_1 \dots (1)$ ، $b = mq_2 + r_2 \dots (2)$. الآن بما أن : $a \equiv b \pmod{m}$ هذا يقتضي أن : $m \mid a - b$ ، كذلك : $m \mid mq_1 - mq_2 = m(q_1 - q_2)$ ، وهذا يقتضي أن :

$$m \mid (a - b) \pm m(q_1 - q_2)$$

الآن بطرح : $(1) - (2)$ سنجد أن :

$$(a - b) = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \Rightarrow (a - b) - m(q_1 - q_2) = (r_1 - r_2)$$

استنتجنا أن : $m \mid (a - b) \pm m(q_1 - q_2)$. إذاً : $m \mid (r_1 - r_2)$ ، ولكن : $0 \leq |r_1 - r_2| < m$ لأنها باقي القسمة ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان : $r_1 - r_2 = 0$. إذاً : $r_1 = r_2$.

(2) إذا كان : $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، فإن : $ac \equiv bc \pmod{\left(\frac{m}{d}\right)}$ ، حيث : $d = \gcd(m, c)$.

الإثبات :

بما أن : $ac \equiv bc \pmod{m}$. إذاً : $m \mid ac - bc = c(a - b)$ ، وبالتالي يوجد عدد صحيح : $k \in \mathbb{Z}$ يحقق : $c(a - b) = km$. بقسمة الطرفين على : d سنجد أن : $\left(\frac{c}{d}\right)(a - b) = k\left(\frac{m}{d}\right)$. تذكر أن : $\gcd\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1$. من خواص القاسم . إذاً : $\frac{m}{d} \mid (a - b)$ لأن : $\left(\frac{m}{d}\right) \nmid \left(\frac{c}{d}\right)$ ، و

$$\frac{\left(\frac{c}{d}\right)(a - b)}{\left(\frac{m}{d}\right)} = k \text{ . يمثل عدد صحيح . إذاً : } a \equiv b \pmod{\left(\frac{m}{d}\right)}$$

فائدة : إذا كان : $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، و $\gcd(m, c) = 1$ ، فإن : $a \equiv b \pmod{m}$.

(4) أمثلة عديدة على هذه الخواص :

(1) إذا كان : $13 \equiv 3 \pmod{5}$. لاحظ أن : $13 - 3 = 10$ ، $5 \mid 10$ ، كذلك : $13 = 2 \times 5 + 3$ ، فإن باقي قسمة : 13 على : 5 تساوي : 3 . كذلك عند قسمة : 3 على : 5 ، فإن الباقي يساوي : 3 لأننا يمكن كتابته على الصورة : $3 = 0 \times 5 + 3$.

(2) إذا كان : $4 \equiv 1 \pmod{3}$ ، فإن : $5 \times 4 = 20 \equiv 5 \times 1 \pmod{3}$ ، وهذا يكفي : $20 \equiv 2 \pmod{3}$ ، ويكافئ أيضاً : $20 \equiv -1 \pmod{3}$.

(3) إذا كان : $16 \equiv 4 \pmod{6}$ ، فإن هذا يكفي : $2 \times 8 \equiv 2 \times 2 \pmod{6}$ ، وبما أن : $(2, 6) = 2$ إذاً التطابق يكفي : $8 \equiv 2 \pmod{3}$.
لاحظ أننا لانستطيع أن نختصر العامل المشترك إلا إذا كان القاسم المشترك بين القاسم ، والعدد الذي سنختصره يساوي الواحد أو كنا نستطيع أن نقسم القاسم على العامل المشترك بينه ، وبين العدد المختصر .

(5) أهم مسائل التطابقات :

إذا كان لدينا التطابق على الصورة : $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن : b يمكن أن يحدد أنواع المسائل التالية :

(1) إيجاد باقي قسمة عدد على عدد آخر ، وتمثله : b ، وهذا مثال :

مثال : أوجد باقي قسمة : 2^{1432} على : 3 .

نعلم أن : $2 \equiv -1 \pmod{3}$ ، بالرفع للقوة : $2^{1432} \equiv (-1)^{1432} \pmod{3}$ ، وهذا يكفي : $2^{1432} \equiv 1 \pmod{3}$ لأن الأس زوجي . إذاً الباقي يساوي : 1 .

(2) إثبات قابلية قسمة عدد على عدد آخر ، وتمثله : $b = 0$ ، وهذا مثال :

مثال : أثبت أن العدد : $7^{2011} - 2^{2011}$ يقبل القسمة على : 5 .

بالتطابقات : $7 \equiv 2 \pmod{5}$ بالرفع للقوة : $7^{2011} \equiv 2^{2011} \pmod{5}$ كذلك : $2 \equiv 2 \pmod{5}$ ، بالرفع للقوة : $2^{2011} \equiv 2^{2011} \pmod{5}$ يصبح التطابق على الصورة : $7^{2011} - 2^{2011} \equiv 2^{2011} - 2^{2011} \equiv 0 \pmod{5}$.
سنجد أن : $7^{2011} - 2^{2011} \equiv 0 \pmod{5}$ ، إذاً : $5 \mid 7^{2011} - 2^{2011}$.

(3) تحديد خانة الآحاد ، والعشرات ، والمئات ، وتمثله : b :

عند قسمة العدد : 23 على 10 لكان الباقي : 3 لاحظ أن : 3 هي خانة الآحاد في العدد : 23 .
عند قسمة العدد : 432 على 100 لكان الباقي : 32 ، وهي تمثل خانتي الآحاد ، والعشرات في العدد .
عند قسمة العدد : 1432 على 1000 لكان الباقي : 432 ، وهي تمثل الآحاد ، والعشرات ، والمئات .
إذاً : إذا طلب في السؤال خانة الآحاد لعدد كل ماعليها هو إيجاد ناتج التطابق مقياس : 10 ، وإذا طلب في السؤال خانة الآحاد ، والعشرات أو العشرات وحدها ، فكل ماعليها هو إيجاد ناتج التطابق مقياس : 100 ، وهكذا .

مثال : أوجد خانة الآحاد للعدد : 3^{1432} .

يأيجاد التطابق مقياس : 10 سنجد أن :

$$9 = 3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (3^2)^{716} \equiv (-1)^{716} \pmod{10} \Rightarrow 3^{1432} \equiv 1 \pmod{10}$$

إذاً : خانة الآحاد تساوي : 1 .

مثال : أوجد خانة الآحاد للعدد : 7^{2011} .

يأيجاد التطابق مقياس : 10 سنجد أن :

$$7^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (7^2)^{1005} \equiv (-1)^{1005} \pmod{10} \Rightarrow 7^{2010} \equiv -1 \pmod{10} \\ \Rightarrow 7 \times 7^{2010} \equiv 7 \times -1 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2011} \equiv -7 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2011} \equiv 3 \pmod{10}$$

إذاً : خانة الآحاد تساوي : 3 .

مثال : أوجد خانة الآحاد ، والعشرات للعدد : 13^{15} .

يأيجاد التطابق مقياس : 100 سنجد أن :

$$13^2 \equiv 169 \equiv 69 \pmod{100} \Rightarrow 13 \times 13^2 \equiv 13 \times 69 \equiv 897 \equiv -3 \pmod{100} \\ \Rightarrow (13^3)^5 \equiv (-3)^5 \pmod{100} \Rightarrow 13^{15} \equiv -243 \equiv 57 \pmod{100}$$

إذاً : خانتي الآحاد ، والعشرات هما : 57 .

وستأتي أفكار متنوعة للمسائل ضمن التطبيقات .

(7) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أوجد باقي قسمة : $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2010^{2010}$ على : 2 .

الحل :

لكل عدد فردي : a ، فإن : $a^a \equiv 1 \pmod{2}$. ولكل عدد زوجي : b ، فإن : $b^b \equiv 0 \pmod{2}$:

الآن : عدد الأعداد الفردية المحصورة بين : 1, 2010 تساوي : 1005 عدد فردي .

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2010^{2010} \equiv 1005 \equiv 1 \pmod{2}$$

لاحظ أن : 1005 عند قسمتها على : 2 ، فإن الباقي : 1 .

(2) ماهي آخر خانيتين من العدد : 17^{17} .

الحل :

آخر خانيتين في العدد هما خانتا الآحاد ، والعشرات . باستخدام مفكوك ذات الحدين :

$$(7 + 10)^{17} = 7^{17} + 17 \cdot 7^{16} \cdot 10 + \dots$$

نلاحظ أن هذه الحدود فقط لا تقبل القسمة على : 100 بأخذ التطابق :

$$7 \cdot (7^4)^4 \equiv 7 \cdot (1)^4 \equiv 7 \pmod{100}$$

$$17 \cdot (7^4)^4 \cdot 10 \equiv 17 \cdot (1)^4 \cdot 10 \equiv 70 \pmod{100}$$

$$17^{17} \equiv 7 \cdot (7^4)^4 + 17 \cdot (7^4)^4 \cdot 10 \equiv 77 \pmod{100}$$

(3) أوجد باقي قسمة : 6^{1987} على : 37 .

الحل :

$$6^{1987} \equiv 6 \cdot 6^{1986} \equiv 6 \cdot (6^2)^{993} \equiv 6 \cdot (36)^{993} \equiv 6 \cdot (-1)^{993} \equiv -6 \equiv 31 \pmod{37}$$

إذاً الباقي يساوي : 31 .

(4) أثبت أن : $12233 \cdot 455679 + 87653^3$ تقبل القسمة على : 4 .

الحل :

لاحظ أن العدد : 12233 عبارة عن حاصل جمع : $12200 + 32 + 1$. إذًا : $12200 \equiv 0 \pmod{4}$

كذلك : $32 \equiv 0 \pmod{4}$. إذًا : $12233 \equiv 12200 + 32 + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

بالمثل : $455679 \equiv 455600 + 76 + 3 \equiv 0 + 0 + 3 \equiv 3 \pmod{4}$

أيضاً : $87653 \equiv 87600 + 52 + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 87653^3 \equiv 1 \pmod{4}$

إذًا : $12233 \cdot 455679 + 87653^3 \equiv 1 \times 3 + 1 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$

إذًا : $4 \mid 12233 \cdot 455679 + 87653^3$ لأن الباقي يساوي صفراً .

(5) أثبت أن : $2^{32} + 1$ تقبل القسمة على : 641 .

الحل :

لاحظ أن : $641 = 2^7 \times 5 + 1 = 5^4 + 2^4$. الآن :

$2^7 \times 5 \equiv -1 \pmod{641} \Rightarrow (2^7 \times 5)^4 \equiv (-1)^4 \pmod{641} \Rightarrow 2^{28} \times 5^4 \equiv 1 \pmod{641}$

ولكن : $5^4 + 2^4 \equiv 0 \pmod{641} \Rightarrow 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$. إذًا :

$$2^{28} \times -2^4 \equiv 2^{32} \equiv -1 \pmod{641} \Rightarrow 2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$$

إذًا : $641 \mid 2^{32} + 1$ لأن الباقي يساوي صفراً .

(6) أثبت أنه يوجد عدد لانتهائي من الأعداد الصحيحة : n التي تحقق : $7 \mid 2^n + 27$.

الحل :

بالتجربة سنجد أن : $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$. بالرفع لأي قوة : $k \in \mathbb{N}$ سنجد أن :

$2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ ، وبالتالي : $2^{3k} + 27 \equiv 1 + 27 \equiv 28 \equiv 0 \pmod{7}$. إذًا : $n = 3k$.

ويوجد عدد لانتهائي من الأعداد الصحيحة على الصورة : $n = 3k$. أي أن : $n = 3, 6, 9, \dots$.

(7) أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة : n التي تحقق : $5 \mid 3^n + 2^n$.

الحل :

بالتجربة سنجد أن :

$$9 \equiv 3^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{5} \Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{5}$$

أيضاً :

$$4 \equiv 2^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{5} \Rightarrow 2^{2k+1} \equiv 2(-1)^k \pmod{5}$$

بالجمع سنجد أن :

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} \equiv 3(-1)^k + 2(-1)^k \equiv 5(-1)^k \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 3^{2k+1} + 2^{2k+1} \equiv 0 \pmod{5}$$

إذاً قيمة : $n = 2k + 1$ ، $k = 0, 1, 2, \dots$ أي قيم : n هي كل الأعداد الصحيحة الفردية .

(8) أثبت أن : 7 تقسم العدد : $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

الحل :

$$2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 3^{5555} \equiv (3^5)^{1111} \equiv (243)^{1111} \equiv (5)^{1111} \pmod{7}$$

$$5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{5555} \equiv (4^5)^{1111} \equiv (-5)^{1111} \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (5)^{1111} + (-5)^{1111} \equiv 0 \pmod{7}$$

توضيح : لاحظ أن : $(243)^{1111} \equiv (5)^{1111} \pmod{7}$ لأن : 243 عند قسمتها على : 7 ، فإن الباقي : 5 .

(9) أثبت أن : $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

الحل :

بواقى قسمة أي عدد على : 3 هي : $0, \pm 1$ لاحظ أن الباقي السالب بديل عن الباقي : 2 .

إذاً : $n \equiv 0, \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

(10) إذا كان p : عدد أولي أكبر من 3 : أثبت أن : $7^p - 6^p - 1$ تقبل القسمة على : 43 .

الحل :

أي عدد أولي : $p > 3$ يمكن كتابته على إحدى صورتين : $3k + 1$ حيث : k عدد زوجي ، أو على الصورة : $3k + 2$ حيث : k عدد فردي . الآن ندرس الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى : إذا كان : $p = 3k + 1$ ، فإن :

$$7^p \equiv 7^{3k+1} \equiv 7 \cdot (7^3)^k \equiv 7 \cdot (-1)^k \equiv 7 \pmod{43}$$

$$6^p \equiv 6^{3k+1} \equiv 6 \cdot (6^3)^k \equiv 6 \cdot (1)^k \equiv 6 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 7^p - 6^p - 1 \equiv 7 - 6 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$$

الحالة الثانية : إذا كان : $p = 3k + 2$ ، فإن :

$$7^p \equiv 7^{3k+2} \equiv 7^2 \cdot (7^3)^k \equiv 6 \cdot (-1)^k \equiv -6 \pmod{43}$$

$$6^p \equiv 6^{3k+2} \equiv 6^2 \cdot (6^3)^k \equiv -7 \cdot (1)^k \equiv -7 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 7^p - 6^p - 1 \equiv -6 - (-7) - 1 \equiv 0 \pmod{43}$$

إذاً : $43 \mid 7^p - 6^p - 1$.

(11) أوجد كل الحلول الصحيحة للمعادلة : $x^2 - 5y^2 = 2$.

الحل :

مثل هذه المسائل نحاول ندرس التطابق لمقياس مناسب ، وهنا يمكن أن ندرس التطابق لمقياس : $(\text{mod } 5)$ لكونها معامل لأحد الحدود .

الآن نعيد كتابة المعادلة على الصورة : $x^2 = 5y^2 + 2$. لاحظ أن : $5 \mid 5y^2$. إذاً :

$$5y^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 5y^2 + 2 \equiv 2 \pmod{5}$$

كل عدد صحيح x على إحدى الصور التالية : $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ بتربيعها سنجد أن :

$x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ ، وبالتالي الطرف الأيسر يطابق : $0, 1, 4$ مقياس : 5 . إذاً لا توجد حلول صحيحة

للمعادلة : $x^2 - 5y^2 = 2$ لاختلاف بواقي الطرفين عند قسمتهما على : 5 .

(12) إذا كان : $n = 8k + 7$. أثبت عدم إمكانية كتابة : n كمجموع ثلاثة مربعات .

الحل :

أي عدد صحيح يمكن كتابته على إحدى الصور التالي : $8k, 8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k + 4$ ، وتذكر أن البواقي السالبة هي بديل عن البواقي الأخرى عند قسمة أي عدد على : 8 ، فمثلاً : -3 هي بديل الباقي : 5 .

الآن : $m^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8} \Rightarrow m \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4 \pmod{8}$. إذاً بواقي قسمة أي عدد مربع كامل على : 8 هي : 0, 1, 4 .

الآن عند جمع ثلاثة مربعات نحصل على : $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{8}$.

إذاً مجموع ثلاثة مربعات لا يمكن أن يطابق : 7 مقياس : 8 ، وبالتالي لا يمكن أن يكون : n حاصل جمع ثلاثة مربعات .

(13) إذا كان : 792 يقسم العدد : $13xy45z$ أوجد قيم الخانات .

الحل :

من تحليل العدد : $792 = 8 \times 9 \times 11$. الآن العدد يقبل القسمة على : 8 . إذاً العدد المكون من الخانات الثلاث الأولى تقبل القسمة على : 8 . أي العدد : $45z$ يقبل القسمة على : 8 ، وبالتالي يجب أن تكون الخانة الأولى : z عدد زوجي . بالتجربة للأعداد : 2, 4, 6, 8 ، سنجد أن : $z = 6$.

كذلك العدد يقبل القسمة على : 9 . إذاً مجموع خاناته يقبل القسمة على : 9 . إذاً :

$$1 + 3 + x + y + 4 + 5 + 6 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x + y \equiv -19 \equiv -10 \equiv -1 \equiv 8 \pmod{9}$$

إذاً : $x + y = 8$ بالمثل : بما أن العدد يقبل القسمة على : 11 إذاً من خصائص القسمة على : 11 سنجد أن :

$$\begin{aligned} 6 - 5 + 4 - y + x - 3 + 1 &\equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow x - y + 3 \equiv 0 \pmod{11} \\ &\Rightarrow x - y \equiv -3 \pmod{11} \\ &\Rightarrow x - y \equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

إذاً : $x - y = 8$. بحل المعادلتين سنجد أن : $x = 8, y = 0$.

إذاً العدد هو : 1380456

(14) أوجد خانتي الآحاد ، والعشرات للعدد : 7^{7^7}

الحل :

لاحظ أن : $7^4 \equiv 2401 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 7^3 \cdot 7^4 \equiv 7^7 \equiv 43 \cdot 1 \pmod{100}$

إذاً بكتابة التطابق على صورته الخطية : $7^7 = 100k + 43$.

الآن : $7^{100k} \equiv 1 \pmod{100}$: إذاً . $7^4 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow (7^4)^{25k} \equiv 1^{25k} \equiv 1 \pmod{100}$

كذلك : $7^{43} \equiv 43 \pmod{100}$: إذاً . $7^{43} \equiv 7^3 \cdot (7^4)^{10} \equiv 43 \cdot 1^{10} \equiv 43 \pmod{100}$

الآن :

$$7^{100k} \cdot 7^{43} \equiv 1 \cdot 43 \pmod{100} \Rightarrow 7^{100k+43} \equiv 43 \pmod{100}$$

ولكن : $100k + 43 = 7^7$: إذاً : $7^{100k+43} \equiv 7^{7^7} \equiv 43 \pmod{100}$

إذاً خانتي الآحاد ، والمئات : 43 .

(15) إذا كان : $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$. حيث : $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ أعداد صحيحة .

أثبت أن : $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b$ لا يمكن أن تكون أعداد فردية .

الحل :

نفرض أن جميع الأعداد فردية . الآن : بأخذ التطابق مقياس : $(\text{mod } 8)$:

نعلم أن بواقي أي عدد على : 8 هي ضمن المجموعة : $r = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، وبما أننا فرضنا أن الأعداد

فردية إذاً ستكون البواقي المحتملة هي : $r = \{1, 3, 5, 7\}$ بتربيعها سنجد أن البواقي المحتملة هي : $r^2 = 1$. لأننا

عندما نربع : 1 سيكون الباقي : 1 ، وعند تربيع : 3 سيكون : 9 ، وبما أن التطابق مقياس : 8 ، فإن الباقي

سيبقى : 1 ، وهكذا البقية .

الآن : $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 5 \pmod{8}$ ، بينما : $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ، وهذا تعارض . إذاً جميع

الأعداد زوجية .

(8) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أوجد خانة الآحاد في الأعداد :

$$(a) 42^{1337} \quad (b) 223^{12} - 44^{15} \quad (c) 9^{1003} - 7^{902} + 3^{801}$$

(2) أوجد خانتي الآحاد ، والعشرات للأعداد :

$$(a) 3^{100} \quad (b) (207^{19} - 41)^{10} \quad (c) 9^{9^9}$$

(3) أوجد باقي قسمة : 13^9 على : 14 .

(4) أوجد أول خانة في العدد : $286384 \times 372617154987 \times 15148265$.

(5) أوجد باقي قسمة : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2 + 99^2$ على : 9 .

(6) أثبت أن : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ تقبل القسمة على : 7 .

(7) أوجد كل القيم الصحيحة : n التي تحقق أن : $7 \mid 3^n - 2$.

(8) أثبت أن : 2010 تقسم : $2011^{1431} + 2011^{1430} + \dots + 2011 + 1 - 1432$.

(9) أثبت أن المعادلة : $x^2 - 7y^2 = 3$ ليس لها حلول صحيحة .

(10) أثبت أنه إذا كان : $7 \mid a^2 + b^2$ ، فإن : $7 \mid a$ ، $7 \mid b$ لكل : $a, b \in \mathbb{Z}$.

(11) أثبت أن :

$$(a) n^2 \equiv 0, \pm 1 \pmod{5} \quad (b) n^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7} \quad (c) n^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$$

(12) أثبت أن : $7 \mid 13^{2k} + 2^{2k}$. حيث : k عدد فردي .

(13) أثبت أن المعادلة : $x^2 + y^2 + z^2 = 800000007$ ليس لها حلول صحيحة .

(14) إذا كان : 72 يقسم العدد : $72x20y2$. أوجد : x ، y .

(15) أوجد جميع الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة : $n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + \dots + n_{14}^4 = 1599$.

(16) أثبت أنه إذا كان العدد : $k \in \mathbb{Z}$ يقبل القسمة على : 3 ، فإن مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 .

(17) كتبنا الأعداد الصحيحة ذات خانتيين من : 19 إلى 92 بالتالي لتكوّن الرقم الصحيح الكبير :

$$N = 19202122 \dots 909192$$

لنفرض أن : k أكبر أس للعدد : 3 يقسم N هو 3^k ، فما هي قيمة k ؟

المحاضرة السادسة

النظم العددية

Numerical Systems

يعد استخدام الأرقام كوسيلة للعد والحساب من الإنجازات الهامة التي حققها الإنسان عبر التاريخ والتي ساهمت في تسهيل كافة العمليات الحسابية وتسريعها . فقد استخدم الإنسان منذ القدم الكثير من الأدوات لتمثيل عمليات العد والحساب ومنها استخدامه لأصابع يده العشرة ، والتي كانت الأساس للنظام العددي والذي لا يزال معمول به حتى يومنا هذا والمسمى بالنظام العشري *Decimal System* .

فالعدد : 1432 المكون من أربع خانات هو عدد ضمن النظام العشري ، وسمي بالنظام العشري لأن الرموز التي تمثله هي الأعداد : $\{0,1,2,\dots,9\}$. يمكننا كتابة العدد : 1432 على الصورة :

$$1432 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

لاحظ أن : 10 تظهر في هذه المتسلسلة ، ومنها يمكن كتابة أي عدد في النظام العشري على صورة متسلسلة يظهر فيها أساس النظام ، وهذا المفهوم يمكن تعميمه لأي نظام من الأنظمة العددية .

(1) نظرية :

كل عدد صحيح $k \geq 1$. بحيث : $k = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ (ب) يقابله متتابعة a_0, a_1, \dots, a_n ، و
 $k = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$: بحيث : $0 \leq a_i \leq b-1$ ، $b \geq 2$

هذه النظرية تعطينا طريقة كتابة العدد اعتماداً على أساسه ، فمثلاً العدد : $314159_{(10)}$ مكتوب بالنظام العشري حيث أساسه : 10 ، واختصاراً في النظام العشري لانكتب الأساس . كذلك لانكتب رمز العدد ، فنكتب اختصاراً : 314159 . بينما في بقية الأنظمة نكتب أساسه ، ويمكن كتابة العدد بصورة متسلسلة كما في النظرية كالتالي :

$$314159 = 3 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9$$

(2) أشهر الأنظمة العددية :

طبعاً النظام العشري هو أكثر الأنظمة استخداماً ، وشهرةً ، ولكن توجد أنظمة أخرى لها أهميتها ، ومن أهمها :

(1) النظام الثنائي : *Binary System*

وهو نظام عددي أساسه العدد : (2) مقارنة بالنظام العشري الذي أساسه العدد : (10) ، أي أن عدد الرموز المستخدمة في النظام هي رمزين فقط وهما : {0,1} لتمثيل كافة الأعداد ، ويعتبر النظام الثنائي أساس اللغة التي تتعامل بها الكمبيوترات والأنظمة الرقمية .

مثالاً : العدد : $41_{(10)}$ في النظام العشري يمثلته : $101001_{(2)}$ في النظام الثنائي . وللتأكد :

$$101001_{(2)} = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 41_{(10)}$$

(2) النظام الثماني : *Octal System*

وهو من الأنظمة المستخدمة في الحاسبات الإلكترونية ، وأساسه العدد : (8) ، و الرموز المستخدمة في هذا النظام هي : {0,1,2,3,4,5,6,7} .

مثال : العدد : $31415_{(10)}$ في النظام العشري يمثلته : $75267_{(8)}$ في النظام الثماني . وللتأكد :

$$75267_{(8)} = 7 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 = 31415_{(10)}$$

(3) النظام السادس عشري : *Hexadecimal System*

وهو من الأنظمة المهمة المستخدمة في الحاسبات الإلكترونية أساسه العدد : (16) أي أن عدد الرموز المستخدمة في تشكيل أعداد النظام عددها : 16 رمزاً ، وهي : {0,1,2,3,...,8,9,A,B,C,D,E,F} حيث : الرموز : A,B,...,H هي بديل الأعداد : 10,11,...,15 ، و $A = 10$.

مثال : العدد : $1256_{(10)}$ في النظام العشري يمثلته : $4E8_{(16)}$ في النظام السادس عشري . وللتأكد :

$$4E8_{(16)} = 4 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 8 = 1256_{(10)}$$

(3) هل توجد أنظمة أخرى :

ليست هذه الأنظمة هي الوحيدة ، فيمكن تمثيل أي عدد عشري لأي أساس نريده ، فيمكن اختيار الأساس :
(3) ، أو (4) ، أو (5) ، أو أي أساس نريده .

(4) التحويل من جميع الأنظمة إلى النظام العشري :

التحويل من أي أساس إلى الأساس العشري سهل جداً ، وذلك يتم بتحليل العدد إلى مراتبه اعتماداً على أساس ذلك النظام ثم إيجاد ناتج جمع الحدود ، والعدد الناتج من الجمع سيكون هو العدد في النظام العشري .

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $3141_{(5)}$.

هذا العدد أساسه : (5) مع ضرب كل خانة في الأساس مرفوعاً له الرتبة كالتالي :

$$3141_{(5)} = 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 1 = 375 + 25 + 20 + 1 = 421_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $1215_{(8)}$.

$$1215_{(8)} = 1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 5 = 512 + 128 + 8 + 5 = 653_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $3141_{(7)}$.

$$3141_{(7)} = 3 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 1 = 1029 + 49 + 28 + 1 = 1107_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $1215_{(20)}$.

$$1215_{(20)} = 1 \times 20^3 + 2 \times 20^2 + 1 \times 20^1 + 5 = 8825_{(10)}$$

مثال : حول العدد التالي إلى النظام العشري : $11011001_{(2)}$.

$$1101101_{(2)} = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 109_{(10)}$$

(5) التحويل من النظام العشري إلى أي من الأنظمة الأخرى :

للتحويل من النظام العشري إلى أي من الأنظمة الأخرى نجري القسمة المتكررة على أساس العدد الذي نريد التحويل إليه فنحفظ الباقي ، ونجري القسمة على خارج القسمة ونستمر ، ثم نعيد كتابة العدد ابتداء من أسفل ، وهذه الأمثلة ستوضح الطريقة حتى يكون خارج القسمة مساوياً للواحد .

مثال : حول العدد التالي من النظام العشري إلى النظام الثنائي : $2011_{(10)}$.

		remainder
2011	2	1
1005	2	1
502	2	0
251	2	1
125	2	1
62	2	0
31	2	1
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1
0		

$$2011_{(10)} = 11111011011_{(2)} \text{ إذاً :}$$

وللتأكد :

$$\begin{aligned} 11111011011_{(2)} &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 1 \\ &= 2011_{(10)} \end{aligned}$$

مثال : حول العدد التالي من النظام العشري إلى النظام الثنائي : $400_{(10)}$.

		remainder
400	2	0
200	2	0
100	2	0
50	2	0
25	2	1
12	2	0
6	2	0
3	2	1
1	2	1
0		

$$400_{(10)} = 110010000_{(2)} \text{ إذاً :}$$

مثال : حول العدد : 57 من الأساس : (10) إلى الأساس : (7) .

		remainder
57	7	1
8	7	1
1	7	1
0		

إذاً : $57_{(10)} = 111_{(7)}$

للتأكد : $111_{(7)} = 7^2 + 7^1 + 1 = 57_{(10)}$

مثال : حول العدد : 31415 من الأساس : (10) إلى الأساس : (8) .

		remainder
31415	8	7
3926	8	6
490	8	2
61	8	5
7	8	7
0		

إذاً : $31415_{(10)} = 75267_{(8)}$

للتأكد : $75267_{(8)} = 7 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 = 31415_{(10)}$

مثال : حول العدد : 1432 من الأساس : (10) إلى الأساس : (3) .

		remainder
1432	3	1
477	3	0
159	3	0
53	3	2
17	3	2
5	3	2
1	3	1
0		

إذاً : $1432_{(10)} = 1222001_{(3)}$

للتأكد : $1222001_{(3)} = 1 \times 3^6 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 1 = 1432_{(10)}$

(6) مسائل محلولة على الدرس :

(1) أثبت أن حاصل جمع العددين : $\overline{yx_{(10)}}$ ، $\overline{xy_{(10)}}$. عدد مؤلف .

الحل :

نعيد كتابة العددين على صورة متسلسلة : $\overline{yx_{(10)}} = 10y + x$ ، $\overline{xy_{(10)}} = 10x + y$

بجمع العددين نجد أن :

$$\begin{aligned}\overline{xy_{(10)}} + \overline{yx_{(10)}} &= 10x + y + 10y + x \\ &= 11x + 11y \\ &= 11 \cdot (x + y)\end{aligned}$$

وهذا عدد مؤلف .

(2) في المعادلة : $(YE) \cdot (ME) = TTT$. كل حرف يمثل خانة لعدد في النظام العشري أوجد حاصل

الجمع : $E + M + T + Y$.

الحل :

يمكن تحليل العدد : $TTT = T \cdot 111 = T \cdot 3 \cdot 37$. الآن بما أن :

$$(YE) \cdot (ME) = TTT = T \cdot 3 \cdot 37$$

إذاً أحد العددين : YE ، أو ME يساوي : 37 لأنها من خانتين ، وفي كلا الحالتين : $E = 7$.

نفرض أن : $YE = 37$ ، وبالتالي : $ME = M7 = T \cdot 3$. الآن : حاصل ضرب : $T \times 3$ يعطينا عدد من

خانتين أحاده يساوي : 7 ، و T عدد من خانة واحدة ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان : $T = 9$ ، و

$ME = 27$. إذاً : $Y = 3$ ، $M = 2$ ، $E = 7$ ، $T = 9$ ، وبالتالي : $E + M + T + Y = 21$.

(3) عبر عن العدد : $100100_{(2)}$ في الأساس : (10) .

الحل :

في مثل هذه المسائل نحول للأساس عشرة ، ومن ثم نحول للأساس المطلوب . كالتالي :

$$100100_{(2)} = (2^5 + 2^2)_{(10)} = 36_{(10)} = 44_{(8)}$$

(4) ماهو العدد المكوّن من خانتين ، ويساوي ثلاثة أضعاف حاصل جمع خاناته .

الحل :

نفرض العدد هو : $\overline{ab_{(10)}}$. إذاً : $7a = 2b \Rightarrow 10a + b = 3 \cdot (a + b)$. الآن :

قيم : $0 \leq a, b \leq 9$. بالتجربة سنجد أن : $b = 7$, $a = 2$ ، والعدد هو : 27 .

للتأكد : $27 = 3 \cdot (2 + 7)$.

(5) أوجد حاصل جمع الأعداد من خانتين ، والتي تقبل القسمة على كل من الخانتين .

الحل :

نفرض أن العدد : $10a + b$. إذاً : $b \mid 10a + b$, $a \mid 10a + b$.

بما أن : $a \mid 10a + b$. إذاً : $a \mid b$ ، وبما أن : $b \mid 10a + b$. إذاً : $b \mid a$.

الآن : يمكن أن نكتب : $b = ka$ ، وبالتالي : $k \mid 10a \Rightarrow ka \mid 10a$ ، وبالتالي : $k = 1, 2, 5$.

عندما : $k = 1, 2, 5$ يصبح العدد على إحدى الصور : $11a, 12a, 15a$ ، وبما أن : $1 \leq a \leq 9$ ، بالتجربة

سنجد الأعداد التي تحقق : $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 12, 24, 36, 48, 15\}$ ، ومجموعها : 630 .

(6) أوجد الصورة الاعتيادية للعدد الدوري : $0.\overline{123}$.

الحل :

تعريف العدد الدوري : هو العدد الذي تتكرر بعض خاناته بصورة دورية مثل : $0.123123123\ldots$ ، ويرمز له

بالرمز : $0.\overline{123}$ وهو يدل على تكرار الخانات العشرية : 1, 2, 3 بصورة دورية .

نفرض أن العدد : $a = 0.\overline{123}$. بالضرب في : 1000 . الآن :

$$\begin{aligned} 1000M &= \overline{123.123} \\ &= 123 + \overline{0.123} = 123 + M \\ \Rightarrow 1000M - M &= 123 \\ \Rightarrow 999M &= 123 \\ \Rightarrow M &= \frac{123}{999} \end{aligned}$$

(7) أوجد كل الأعداد الصحيحة من خانتين التي تحقق أن حاصل الطرح بين العدد ، وحاصل ضرب الخانتين يساوي : 12 .

الحل :

نفرض أن خانتي العدد : a, b . إذاً : يصبح العدد على الصورة : $10a + b$.

الآن : $10a + b - ab = 12$. بالتحليل :

$$10a + b - ab = 12 \Rightarrow 10a + b - ab - 10 = 2$$

$$\Rightarrow (a - 1)(10 - b) = 2$$

بما أن الأعداد صحيحة . إذاً : $a - 1 = 1$ ، أو $10 - b = 2$ ، وبالتالي : $a = 2$ ، $b = 8$.

أو : $a - 1 = 2$ ، أو $10 - b = 1$ ، وبالتالي : $a = 3$ ، $b = 9$.

وبالتالي الأعداد هي : 28 ، 39 .

(8) أوجد كل الأعداد الطبيعية : x ضمن الأساس العشري ، و التي حاصل ضرب خاناتها يساوي : $x^2 - 10x - 22$ من العدد الأصلي .

الحل :

نفرض العدد هو : $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. بما أن الأساس هو العشري إذاً يمكن كتابة العدد على الصورة :

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

حيث : $a_n \neq 0$ ، و $a_k \leq 9$

الآن نفرض أن : $f(x) = x^2 - 10x - 22$. إذاً :

$$f(x) = x^2 - 10x - 22 = a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1 \cdot a_0 \leq 9^n < 10^n a_n \leq x$$

من هذه المتباينة تستفيد فائدة مهمة ، وهي أن ناتج حاصل ضرب خانات العدد دوماً أصغر من العدد نفسه .

إذاً : $x : f(x) = x^2 - 10x - 22 \leq x$ ، الآن عندما : $x \leq 9$ سنلاحظ أن المعادلة لا تتحقق لأن حاصل الضرب لن يكون عدداً سالباً ، وعندما : $x \geq 13$ لن تتحقق المتباينة ، وبالتالي : $x = 10, 11, 12$. بالتجربة سنجد أن العدد الذي يحقق هو : $x = 12$ فقط . حاصل ضرب خاناته يساوي : 2 ، وبالتعويض عن قيمة : $x = 2$ في المعادلة سيكون الناتج مساوياً لـ 2 .

(9) أوجد أصغر عدد صحيح بحيث إذا حذفنا الخانة الأولى ، فإن العدد المتبقي أصغر بـ : 57 مرة من العدد الأصلي .

الحل :

نفرض العدد على الصورة : $10^n x + y$. حيث : y تمثل بقية الخانات . إذاً :

$$5y = 10^n x + y \Rightarrow 56y = 10^n x \Rightarrow 8 \times 7 \times y = 10^n x$$

الآن : بما أن : 7 عامل . إذاً : $10^n x$: 7 ، ولكن : 10^n : 7 إذاً : x : 7 ، وبما أن : $1 \leq x \leq 9$.

إذاً : $x = 7$ لأن : x إحدى خانات العدد . الآن : 10^n : $8y$ ، وبالتالي : $125 \cdot 10^n$: $1000y$. إذاً :

$$y = 125 \times \frac{10^n}{1000} \Rightarrow y = 125 \times 10^{n-3} , n \geq 3$$

إذاً أصغر قيمة تحقق عندما : $n = 3$ ، وبالتالي : $y = 125$ ، والعدد هو : 7125 .

وللتحقق : $7125 = 57 \times 125$.

(10) أوجد عدد من أربع خانات : $abcd$ يحقق : $4 \cdot abcd = dcba$.

الحل :

بما أن : $4 \cdot abcd = dcba$ سنستنتج أن العدد : $dcba$ زوجي . كذلك سنستنتج أن : $a < 3$ لأنه إذا كان : $a \geq 3$ ، فإن العدد الناتج بعد ضربه في : 4 سيكون من خمس خانات . مثلاً : $4 \times 3000 = 12000$.

الآن : بما أن : $dcba$ عدد زوجي . إذاً : a عدد زوجي ، وبالتالي : $a = 2$. إذاً يصبح العدد على الصورة : $4 \cdot 2bcd = dcba$. إذاً : $d \geq 8$ ، ولكن خانة الآحاد في العدد : $dcba$ تساوي : 2 . إذاً يجب أن يكون خانة الآحاد في حاصل الضرب : $4 \times d$ مساوياً لـ 2 ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $d = 8$. إذاً يصبح العدد على الصورة : $4 \cdot 2bc8 = 8cb2$. نعيد كتابة العدد على صورته العشرية :

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2$$

وبالتالي : $390b + 30 = 60c$ وبالقسمة على : 30 يصبح العدد على الصورة : $13b + 1 = 2c$. الآن الطرف الأيمن عدد موجب يجب أن يكون قيمته : $2c \leq 18$ ، وهذا لن يتحقق إلا إذا كان : $b < 2$.

إذاً : $b = 1$ ، وبالتالي العدد هو : $abcd = 2178$.

(11) أوجد قيمة العدد الصحيح : m الذي يحقق أن : $\overline{71(m)} = 3 \times \overline{17(m)}$.

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورة متسلسلة : $7m + 1 = 3 \times (m + 7)$ ، وبالتالي :

$$7m + 1 = 3m + 21 \Rightarrow 4m = 20 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

(12) أوجد قيم : b بحيث : $5 \mid \overline{1111(b)}$.

الحل :

نعيد كتابة العدد على صورة متسلسلة : $\overline{1111(b)} = b^3 + b^2 + b + 1$ ، و $b \geq 2$.

نفرض أن باقي قسمة : $b^3 + b^2 + b + 1$ على : 5 تساوي : r ، و $r = 0, 1, 2, 3, 4$ ، ولكي يقبل العدد القسمة على : 5 يجب أن يكون الناتج : $r^3 + r^2 + r + 1$ يقبل القسمة على : 5 ، وبالتجربة سنجد أن القيم التي تحقق هي : $r = 2, 3, 4$ ، وبالتالي قيم : b هي : $5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ ، و $k = 0, 1, 2, \dots$.

(13) أثبت ضمن الأساس : (7) أي عدد صحيح يكون زوجياً إذا وإذا فقط كان مجموع خاناته عدداً زوجياً.

الحل :

نثبت الطرف الأول : نفرض أن : $\overline{a_n \dots a_0(7)} = a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 7 + a_0$ عدد زوجي أي أن العدد يقبل القسمة على : 2 ، وبالتالي :

$$m_{(7)} \equiv a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 7 + a_0 \equiv 0 \pmod{2}$$

بما أن : $7^n \equiv 1 \pmod{2}$ لكل : $n \in \mathbb{N}$ إذاً :

$$a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 7 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{2}$$

إذاً : $2 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ ، وهو المطلوب .

نثبت الطرف الثاني ، وهو : $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ عدد زوجي .

أي أن : $2 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ ، وبالتالي : $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{2}$.

نعلم أن : $7^n \equiv 1 \pmod{2}$ ، إذاً : $a_n 7^n \equiv a_n \pmod{2}$ ، وبالمثل : $a_{n-1} 7^n \equiv a_{n-1} \pmod{2}$ بالمثل
البقية . بالجمع من خصائص التطابقات سنجد أن :

$$a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 7 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{2}$$

(14) إذا عرفنا : $S(n) = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$ حيث : $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}_{(10)} \in \mathbb{Z}^+$.
أثبت أن : $9 \mid n - S(n)$.

الحل :

نعيد كتابة العدد : n على صورته العشرية : $n_{(10)} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$.
أولاً : لاحظ أن : $10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + \dots + 10 + 1) = 9 \cdot (10^{n-1} + \dots + 10 + 1)$.
الآن :

$$\begin{aligned} n - S(n) &= (a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0) - (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0) \\ &= (a_k 10^k - a_k) + (a_{k-1} 10^{k-1} - a_{k-1}) + \dots + (a_1 10^1 - a_1) + (a_0 - a_0) \\ &= a_k \cdot (10^k - 1) + a_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + 0 \\ &= a_k \cdot 9 \cdot (10^{k-1} + \dots + 1) + a_{k-1} \cdot 9 \cdot (10^{k-2} + \dots + 1) + \dots + a_1 \cdot 9 \\ &= 9 \cdot [a_k \cdot (10^{k-1} + \dots + 1) + a_{k-1} \cdot (10^{k-2} + \dots + 1) + \dots + a_1] \\ &\text{بما أن : } 9 \text{ عامل للمقدار : } n - S(n) \text{ . إذاً : } 9 \mid n - S(n) \end{aligned}$$

(15) حدد ما إذا كان العدد : $\underbrace{20 \dots 04}_{2004 \text{—times}}$ مربع كامل .

الحل :

لاحظ أن العدد يقبل القسمة على : 3 لأن مجموع خاناته يساوي : 6 ، ولكن لا يقبل القسمة على : 9 لأن
مجموع خاناته لا يقبل القسمة على : 9 . إذاً العدد ليس مربع كامل .
لأنه لو كان مربع كامل ، ويقبل القسمة على : 3 لقبيل القسمة على مربع الثلاثة ، وهو : 9 .

(16) أوجد أصغر عدد : n الذي يحقق : $\text{lcm}[15, n] = n$ ، وخاناته إما : 0 أو 8 .

الحل :

بما أن : $\text{lcm}[15, n] = n$ هذا يعني أن : $15 \mid n$ ، وبالتالي : $3 \mid n$ ، و $5 \mid n$. بما أن : $5 \mid n$ هذا يعني
أن خانة الآحاد تساوي : 0 ، وبما أن : $3 \mid n$. إذاً مجموع خاناته يقبل القسمة على : 3 ، وبما أن خاناته :
0, 8 . بالتجربة سنجد أن أقل خانات تحقق هي : 8880 .

(7) مسائل إضافية على الدرس :

(1) حول الأعداد التالية إلى الأساس عشرة :

$$(a) 2244_{(5)} , (b) 123456_{(7)} , (c) 20201_{(3)} , (d) 11001100_{(2)}$$

(2) حول العدد التالي : $1776_{(10)}$ إلى الأساسات :

$$(a) (2) , (b) (3) , (c) (4) , (d) (5) , (e) (6) , (f) (7)$$

(3) كم عدد الأساسات بين : (2) ، و (9) بحيث يكون آخر خانة في العدد : $576_{(10)}$ تساوي الواحد .

(4) أوجد الناتج : $467_{(8)} + 12_{(3)} - 6_{(11)}$ في الأساس : (10) .

(5) عبر عن العدد : $1010110101_{(2)}$ ضمن الأساس : (4) .

(6) أوجد قيمة : x إذا كان :

$$(a) x2_{(4)} = 16_{(8)} , (b) 123_{(x)} = 1004_{(4)} , (c) 23x_{(4)} = 1x10_{(3)}$$

(7) كم خانة للعدد : $4^{20} \times 5^{27}$ في التمثيل العشري .

(8) إذا كان : $325_{(x)} = 125$ أوجد : x .

(9) أوجد الصورة الاعتيادية للعدد الدوري : $0.9\overline{1}$.

(10) أوجد كل الأعداد الصحيحة التي خانتها الأولى تساوي : 6 ، وإذا ألغينا الخانة الأولى ، فإن العدد

المكون من الخانات الباقية يساوي : $\frac{1}{25}$ من العدد الأصلي .

(11) أوجد عدد من خمس خانات : $abcde$ يحقق : $4 \cdot abcde = edcba$.

(12) أثبت أن مربع أي عدد أولي لا يمكن كتابته على صورة عدد مكون من أربعة أرقام متشابهة لأي أساس .

(13) أوجد قيمة العدد الصحيح : m الذي يحقق أن : $424_{(m)} = 3 \times 123_{(m)}$.

(14) ليكن : $m = x^2 + x + 1$ حيث : x عدد في الأساس : 6 أوجد القيم الممكنة لرقم الآحاد في

العدد : m .

(15) حاصل جمع العددين : $AMC10 + AMC12 = 123422$ أوجد : $A + M + C$.

(16) أوجد الأساس : b بحيث يكون العددين : $55_{(b)} , 45_{(b)}$ عددين مربعين لعددين صحيحين متتاليين .

المحاضرة السابعة

الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

الاستقراء الرياضي (*Mathematical induction*) هو أحد أنواع البرهان الرياضي تستخدم عادة لبرهنة أن



معادلة أو متباينة ما صحيحة لمجموعة لانتهائية من الأعداد ،
كالأعداد الصحيحة . كذلك يستخدم لإثبات قابلية القسمة
لعبارة لا نستطيع إثباتها إلا بهذه الطريقة ، أو كانت هذه
الطريقة هي الأسهل في الإثبات . يعتمد هذا البرهان على مبدأ
وقوع أحجار الدومينو ، ويتم على مرحلتين . بصورة عامة . :
في الأولى ، يبرهن أن أول رقم في المجموعة يحقق المطلوب ،
وفي الثانية نفرض أن المطلوب يتحقق لعدد ما من المجموعة ،
ونبرهن ، جبرياً ، مثلاً ، أنه يتحقق أيضاً للعدد الذي يليه في المجموعة استناداً على الفرض وعلى الأساس .

كما ذكر سابقاً يعتمد مبدأ الاستقراء على خطوتين خطوة الفرض وخطوة الإثبات ، ولكن بعض الأحيان نحتاج
أن نعتمد على صحة خطوتين أو أكثر قبل إثبات العمومية ، أو في بعض الأحيان قد يكون الإثبات يبدأ صحة
عند غير الرقم الأول .

(1) الاستقراء الرياضي العام : *General Mathematical Induction*

وهو الأكثر شهرة ، ويعتمد على خطوتين . خطوة الأساس ، خطوة الاستقراء ، ولكن يمكن تقسيم خطواته .
للتوضيح . لثلاثة أجزاء .

إذا كانت : P_n متتالية من العبارات الرياضية ، و n_0 عدد صحيح

ثبت صحة العبارة عند : P_{n_0} .

نفرض صحة العبارة عند : P_k حيث : $k \geq n_0$.

ثبت صحة العبارة عند : P_{k+1} .

والأمثلة التالية ستوضح الخطوات .

(2) مسائل محلولة على الدرس :

$$(1) \text{ أثبت صحة العبارة التالية : } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الحل :

فالنطبق الخطوات الثلاث :

$$\text{العبارة صحيحة عند : } n = 1 \text{ لأن : } 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$$\text{نفرض صحة العبارة عند : } n = k \text{ أي أن : } 1 + 2 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن :

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

نبدأ دوماً من الخطوة السابقة بإضافة الحد الذي رتبته : $(k+1)$ لطرفي العبارة :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

$$(2) \text{ أثبت صحة العبارة التالية : } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل :

فلنختصر الخطوات قليلاً :

$$\text{لاحظ أن : } P(1) \text{ صحيحة لأن : } 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

$$\text{نفرض صحة العبارة عند : } P(k) \text{ أي : } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

الآن نريد إثبات الصحة عند العدد الذي يلي k أي إثبات أن : $P(k+1)$ صحيحة .

$$\text{أي المطلوب أن : } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \text{ ، فالنبدأ :}$$

$$\begin{aligned}
 P(k+1) &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= (k+1) \left[\frac{k(2k+1) + 6k + 6}{6} \right] \\
 &= (k+1) \left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right] \\
 &= \left[\frac{(k+2)(2k+3)}{6} \right] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
 \end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

$$(3) \text{ أثبت صحة العبارة التالية : } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل :

$$\text{العبارة متحققة عند : } P(1) \text{ لأن : } 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$\text{المطلوب إثبات أن : } \sum_{n=1}^{n=k+1} n^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \text{ مع ملاحظة أنا : } P(k) \text{ متحققة فرضاً . إذاً :}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{n=k+1} n^3 &= \sum_{n=1}^{n=k} n^3 + (k+1)^3 \\
 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4} \right] \\
 &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] \\
 &= (k+1)^2 \left[\frac{(k+2)^2}{4} \right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
 \end{aligned}$$

والآن انتهى الإثبات .

لاحظ أننا اختصرنا توضيح بعض الخطوات ، وشرحها كما في المثال الأول .

ولاحظ أننا نوعنا طرق الإثبات ، والتعبير عن العبارة حتى تستفيد من إثباتها في مراجع مختلفة .

$$(4) \text{ باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن : } 3^n > 2^n \text{ لكل عدد طبيعي : } n$$

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(1)$ صحيحة لأن : $3^1 > 2^1$. كذلك نفرض صحة العبارة : $P(k)$ أي أن : $3^k > 2^k$.

الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} \\ &= 3^k \cdot 3 \\ &> 2^k \cdot 3 > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1} \end{aligned}$$

إذاً : $3^n > 2^n$ متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : n .

(5) أثبت لأي عدد صحيح : n ، فإن : 3 تقسم : $n^3 + 2n$.

الحل :

عند : $n = 1$ سنجد أن العبارة صحيحة أي أن : $P(1)$ متحققة .

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$ أي أن : $P(k)$ متحققة .

نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب أن : $3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$.

الآن : نفرض أن : $3M = k^3 + 2k$.

إذاً من الفرض :

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= \underbrace{k^3 + 2k}_{3M} + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3M + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3(M + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

وهذا مقدار يقبل القسمة على : 3 لأنه من عوامله .

(6) باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن : $3^n > 2^n + n$ لكل عدد طبيعي : $n \geq 2$.

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(n=2)$ صحيحة لأن : $3^2 = 9 > 2^2 + 2 = 6$. كذلك نفرض صحة

العبارة : $P(k)$ أي أن : $3^k > 2^k + k$. الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} \\ &= 3 \cdot 3^k > 3(2^k + k) \\ &= 3 \cdot 2^k + 3k > 2 \cdot 2^k + k + 1 \\ &= 2^{k+1} + k + 1 \end{aligned}$$

إذاً : $3^{k+1} > 2^{k+1} + k + 1$ إذاً العبارة متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : $n \geq 2$.

(7) باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أثبت أن : $n! > 3^n$ لكل عدد طبيعي : $n \geq 7$.

الحل :

المقدمة متحققة أي : $P(n=7)$ صحيحة لأن : $7! = 5040 > 3^7 = 2187$. كذلك نفرض صحة العبارة

: $P(k)$ أي أن : $k! > 3^k$. الآن نثبت صحة العبارة عند : $P(k+1)$. إذاً :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)! \\ &= (k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 3^k \\ &= k \cdot 3^k + 3^k > k \cdot 3^k \end{aligned}$$

إذاً : $(k+1) \cdot k! > k \cdot 3^k = 3^{k+1}$ ، وهذا يعني أن : $(k+1)! > 3^{k+1}$. إذاً : $P(k+1)$

إذاً العبارة متحققة دوماً لكل عدد طبيعي : $n \geq 7$.

(8) أثبت أن : $3^{3n+3} - 26n - 27$. حيث : n عدد صحيح موجب .

الحل :

عند : $n=1$ سنجد أن : $3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$. إذاً العبارة صحيحة أي أن : $P(1)$

متحققة . كذلك العبارة : $3^{3k+3} - 26k - 27$: $169 \mid$ متحققة .

الآن نريد أن نثبت : $3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27$: $169 \mid$.

من خواص القاسم لعددتين إذا كان يقسم أحدهما ، ويقسم حاصل جمعهما أو حاصل طرحهما ، فهو يقسم الآخر .
الآن :

$$\begin{aligned} & 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 - (3^{3k+3} - 26k - 27) = \\ & = 27 \cdot 3^{3k+3} - 26k - 26 - 27 - (3^{3k+3} - 26k - 27) = 26 \cdot 3^{3k+3} - 26 = 26(3^{3k+3} - 1) \\ & \text{الآن يكفي أن نثبت أن : } 13 \mid 3^{3k+3} - 1 \text{ ، وهذه سهلة من تحليل المقدار حيث :} \\ & 3^{3k+3} - 1 = 27^{k+1} - 1 = 26(27^k + \dots + 1) \Rightarrow 13 \mid 3^{3k+3} - 1 \\ & \text{إذاً : } 13 \cdot 13 = 169 \mid 26 \cdot 3^{3k+3} - 26 \text{ ، وبالتالي : } 169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27 \end{aligned}$$

(9) أثبت أن مجموع ثلاثة أعداد طبيعية مكعبة متتالية يقبل القسمة على : 9 .

الحل :

نفرض أن الأعداد الطبيعية المتتالية هي : $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.
عندما : $n = 1$ تصبح العبارة على الصورة : $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ ، وهو عدد يقبل القسمة على : 9 . إذاً العبارة متحققة عندما : $n = 1$.

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$ أي أن : $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$.
الآن نثبت فقرة الاستقراء كالتالي :

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3) \end{aligned}$$

الآن العبارة من جزئين أحدهما يقبل القسمة على : 9 من خطوة الفرض ، والآخر تمثل التسعة عامل من عوامله إذاً المقدار يقبل القسمة على : 9 .

(10) إذا كانت : $E_n = 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$. أثبت لأي عدد صحيح : $n \geq 0$ ، فإن : $23 \mid E_n$.

الحل :

عند : $n = 0$ سنجد أن : $E_0 = 23$ إذاً العبارة صحيحة أي أن : $P(0)$ متحققة .
نفرض صحة العبارة عند : $n = k$ أي أن : $E_k = 2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}$ متحققة .
نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $23 \mid 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5}$.
تعتمد الفكرة على طرح : $P(k+1) - P(k)$ ، فإذا كان : 23 تقسم ناتج الطرح ، فسوف تقسم الحد : $P(k+1)$ من خواص القاسم .
الآن :

$$\begin{aligned} & 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5} - 36(2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}) \\ &= 128 \cdot 2^{7k+3} + 5625 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1} - 36(2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}) \\ &= 92 \cdot 2^{7k+3} + 5589 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1} \\ &= 23(4 \cdot 2^{7k+3} + 243 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}) \end{aligned}$$

إذاً بما أن المقدار يقسم حاصل الطرح ، ويقسم أحد الحدين ، فهو يقسم الحد الآخر .
إذاً $23 \mid P(k+1) = 2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5}$. هذا يعني أن العبارة مطلقاً صحيحة .

(11) أثبت أن : $7^n - 4^{n+2}$ تقبل القسمة على : 3 . لكل عدد صحيح موجب : n .

الحل :

نثبت صحة العلاقة عند : $n = 1$ ، فنجد أن : $7^1 - 4^3 = 7 - 64 = -57$ ، وهو عدد يقبل القسمة على : 3 . إذاً العبارة الأولى متحققة .

نفرض صحة العلاقة عند : $n = k$ ، وهذا يقتضي أن : $3 \mid 7^k - 4^{k+2}$. إذاً : $7^k - 4^{k+2} = 3m$.
الآن : نثبت صحة العلاقة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $3 \mid 7^{k+1} - 4^{k+3}$. الآن :

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 4^{k+3} &= 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 7^k - (7 - 3) \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 7^k - 7 \cdot 4^{k+2} + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot (7^k - 4^{k+2}) + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 7 \cdot 3m + 3 \cdot 4^{k+2} \\ &= 3 \cdot (7m + 4^{k+2}) \end{aligned}$$

إذاً : $3 \mid 7^{k+1} - 4^{k+3}$ ، وبالتالي العبارة صحيحة لكل عدد : $n \in \mathbb{Z}^+$.

(12) إذا كان : a_1, a_2, \dots متتالية معرفة كالتالي : $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، و $a_1 = 5$ ، $n \geq 1$. أثبت أن : $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$ لكل : $n \geq 1$.

الحل :

عند : $n = 1$ تصبح العبارة على الصورة : $a_1 = 3 \cdot 2^1 - 1 = 6 - 1 = 5$. إذاً العبارة متحققة .

نفرض صحتها عند : $n = k$. أي أن : $a_k = 3 \cdot 2^k - 1$ صحيحة ، ومتحققة .

الآن نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن : $a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$.

بما أن : $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، ومعطى أن : $a_k = 3 \cdot 2^k - 1$ متحققة إذاً :

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(3 \cdot 2^k - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 + 1 = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$$

وهو المطلوب .

(13) أثبت أن : $\frac{(n^3 + 2n)}{3}$. عدد صحيح لكل : $n \in \mathbb{N}$.

الحل :

عند : $n = 1$ تصبح العبارة على الصورة : $\frac{(1^3 + 2 \cdot 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$. إذاً العبارة متحققة .

نفرض صحة العبارة عند : $n = k$. أي : $\frac{(k^3 + 2k)}{3}$ عدد صحيح . إذاً : $k^3 + 2k = 3m$.

نثبت صحة العبارة عند : $n = k + 1$. أي إثبات أن : $\frac{(k+1)^3 + 2(k+1)}{3}$ عدد صحيح .

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^3 + 2(k+1)}{3} &= \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2}{3} \\ &= \frac{k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3}{3} \\ &= \frac{3m + 3k^2 + 3k + 3}{3} \\ &= \frac{3(m + k^2 + k + 1)}{3} \\ &= m + k^2 + k + 1 \end{aligned}$$

وهذا عدد صحيح .

(14) إذا كان : a_1, a_2, \dots, a_n . أعداد أولية نسبياً . أثبت أن : $lcm[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

الحل :

هنا سيبدأ الاستقراء عند : $n = 2$ لأن المضاعف لا يكون إلا لعددتين . الآن عند : $n = 2$ سنجد أن :

$$lcm[a_1, a_2] = \frac{a_1 \cdot a_2}{gcd(a_1, a_2)} = a_1 \cdot a_2$$

لأن : $gcd(a_1, a_2) = 1$ ، وذلك لكون الأعداد أولية نسبياً .

نفرض صحة العلاقة عند : $n = k$ أي : $lcm[a_1, a_2, \dots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$. نريد إثبات صحة العلاقة

$$lcm[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}$$

عند : $n = k + 1$ أي المطلوب إثبات أن :

باستخدام العلاقة بين القاسم ، والمضاعف لعددتين : $gcd(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = 1$. سنجد أن :

$$\begin{aligned} lcm[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] &= lcm[lcm[a_1, a_2, \dots, a_k], a_{k+1}] \\ &= lcm[a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k, a_{k+1}] \\ &= \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}}{gcd(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})} \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1} \end{aligned}$$

(15) أثبت أن العدد : $\underbrace{11\dots1}_{3^n}$. يقبل القسمة على : 3 .

الحل :

معنى السؤال إذا كان العدد مكرر فيه الواحد بعدد قوى الثلاثة أثبت أنه يقبل القسمة على الثلاثة .

واضح أن خطوة الابتداء صحيحة عند : $n = 1$ ، فإن : $111 \mid 3$ ، ونفرض صحتها عند : $n = k$ أي أن :

$$3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^k} . \text{ نريد إثبات صحتها عند : } n = k + 1 \text{ أي المطلوب إثبات أن : } 3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^{k+1}} .$$

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_{3^{k+1}} &= 10^{3^k} + 10^{3^k-1} + \dots + 1 = \frac{10^{3^{k+1}} - 1}{9} = \frac{(10^{3^k})^3 - 1}{9} \\ &= \frac{10^{3^k} - 1}{9} \cdot (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) = \underbrace{\frac{10^{3^k} - 1}{9}}_{3^k} \cdot (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) \end{aligned}$$

وهذا عدد يقبل القسمة على : 3 . لأن : $3 \mid \underbrace{11\dots1}_{3^k}$.

(3) مسائل إضافية على الدرس :

(1) أثبت أن : $10^n - 9n + 80$ تقبل القسمة على : 81 . لكل عدد صحيح : $n \geq 1$.

(2) أثبت أن : $2^n > n^2$ لكل عدد صحيح : $n \geq 5$.

(3) أثبت أن : $3^{n-1} > 5n$ لكل عدد صحيح : $n \geq 4$.

(4) أثبت أن : $0 \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + \dots + (n-1) \cdot 2^1 + n \cdot 2^0 = 2^{n+1} - n - 2$

لكل عدد طبيعي : n .

(5) أثبت أن مجموع : n من الأعداد الفردية المتتالية ابتداءً من الواحد يساوي : n^2 .

(6) أثبت أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ لكل عدد طبيعي : n .

(7) أثبت أن : $(1+x)^n \geq 1+nx$ لكل عدد طبيعي : n ، و $x \geq -1$.

(8) أثبت أن : $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$ لكل عدد طبيعي : n .

(9) أثبت أن : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ لكل عدد : $n = 0, 1, 2, \dots$.

(10) أثبت أن : $\frac{10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5}{9}$ عدد صحيح لكل : $n \in \mathbb{N}$.

(11) أثبت أن : 169 من عوامل العدد : $3^{3n+3} - 26n - 27$ لكل عدد : $n \in \mathbb{N}$.

(12) إذا كان : a_1, a_2, \dots متتالية معرفة كالتالي : $a_{n+1} = 2a_n - 1$ ، و $a_1 = 2$ ، $n \geq 1$. أثبت أن : $a_n = 2^{n-1} + 1$ لكل : $n \geq 1$.

(13) أثبت أن : $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ لكل : $n \geq 2$.

(14) أثبت أن : $f(n) = n(n+1)(n+2)$ أثبت أن : $6 \mid f(n)$ لكل : $n \geq 1$.

(15) أثبت أن : $\frac{4^{2n+1} + 3^{n+2}}{13}$ عدد صحيح لكل : $n \geq 1$.